KONSTRUKCE VÝNOSOVÝCH KŘIVEK V POKRIZOVÉM OBDOBÍ

Jaroslav Baran, Jiří Witzany, Vysoká škola ekonomická v Praze*

1. Úvod

Výnosová křivka bezrizikových úrokových sazeb je základní sadou parametrů pro výpočet současné hodnoty pevných nebo očekávaných finančních toků a pro oceňování složitějších derivativních instrumentů. Tradičním vstupem pro odvozování bezrizikové křivky jsou ceny státních dluhopisů a krátkodobé depozitní úrokové sazby na mezibankovním trhu, viz např. Málek, a kol. (2007). S růstem kreditních rizika státního dluhu a kreditních přirážek státních dluhopisů se však přesnějším základem pro konstrukci bezrizikové křivky staly kotované forwardové (Forward Rate Agreement, FRA) úrokové sazby a sazby úrokových swapů (Interest Rate Swap, IRS). V krizovém a pokrizovém období se ale ukazuje, že ani takto konstruovaná výnosová křivka není dostatečně dobrou aproximací bezrizikové křivky, viz Bianchetti (2008) nebo Bianchetti, Carlicchi (2012).

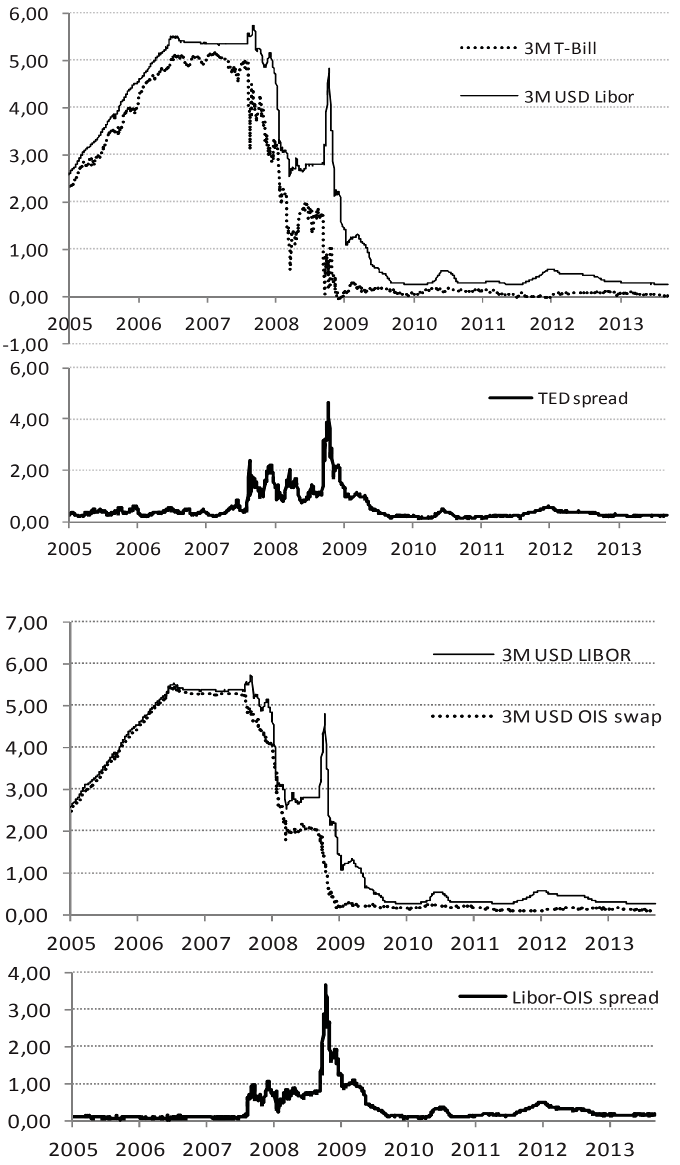
Při uzavírání FRA a IRS obchodů nedochází k výměně jistiny a v porovnání s investicemi do dluhopisů je tak významně omezeno riziko protistrany. Riziko protistrany může být navíc zcela eliminováno při kolateralizaci reálné hodnoty uzavřeného kontraktu. Základem těchto instrumentů je nicméně výměna fixní a referenční sazby (zpravidla 3M nebo 6M IBOR sazby), která by měla odrážet cenu nezajištěného financování na mezibankovním trhu zahrnující i průměrnou rizikovou přirážku tohoto trhu, resp. příslušných referenčních bank. Tato riziková přirážka je potom součástí kotovaných FRA i IRS sazeb a následně se tak promítá do odvozené výnosové křivky. Podle Collin-Dufresne, Solnik (2001) lze swapovou sazbu charakterizovat jako fixní sazbu ekvivalentní opakovanému krátkodobému financování institucí s vysokým ratingem (AA/Aa, za předpokladu, že toto je průměrný rating subjektů na mezibankovním trhu) – v případě zhoršení ratingu může být v dalším období příslušná instituce nahrazena jiným vysoce hodnoceným subjektem. Za normálních okolností je riziko krátkodobých depozit mezibankovního trhu považováno za téměř zanedbatelné a takto konstruovaná křivka je dobrou aproximací křivky bezrizikové, v době krize a v pokrizovém období tento předpoklad však neplatí.

Jako nejméně rizikový nástroj jsou často považovány státní pokladniční poukázky. Indikátor TED je definován jako rozdíl mezi tříměsíční sazbou USD LIBOR a třímě-

* Jaroslav Baran: výzkum byl podpořen z grantu „Pokročilé metody modelování finančních rizik“ IGA VŠE IG102022. Jiří Witzany: výzkum byl podpořen z grantu „Dynamické modely v ekonomii“ GAČR P402/12/G097.

síční sazbou amerických pokladničních poukázek (T-bills) a zobrazuje tedy rizikovou prémii komerčních bank nad americkou vládu. Historický dlouhodobý průměr tohoto ukazatele do roku 2007 byl 30 bazických bodů, v průběhu krize však vystoupal až na neuvěřitelných 450 bodů (viz obrázek 1, nahoře).

Obrázek 1
Vývoj sazeb 3M USD Libor, 3M USD T-Bills a jejich rozdílů (nahoře) a sazeb 3M USD Libor, 3M USD OIS swapu (dole) a jejich rozdílů



(zdroj: Bloomberg)

Vysoká volatilita i samotná výše rozdílu mezi krátkodobými sazbami mezibankovních depozit a krátkodobého státního dluhu vedla banky a finanční instituce k hledání lepšího přiblížení skutečné bezrizikové křivky. Zdrojem pro konstrukci takové křivky „třetí generace“ se v posledních letech staly kotace OIS (Overnight Indexed Swap), tedy nástrojů spočívajících ve výměně fixní sazby a plovoucí jednodenní (O/N) referenční sazby finančního trhu. Riziko OIS sazeb je pouze jednodenní a je tak nižší než tříměsíční mezibankovní riziko (viz obrázek 1, dole).

Při oceňování swapových kontraktů v cizí měně však vzniká další, před krizí relativně neznámý jev spočívající v existenci nezanedbatelných bazických přirážek k plovoucí sazbě v jedné nebo druhé měně, které lze vysvětlit jako přirážky odrážející rozdílnou likviditu i kreditní riziko v jednotlivých měnách. Tento jev vede k protichůdným výkladům, např. podle Chang, Schlogl (2012) je existence těchto přirážek v rozporu s klasickým arbitrážním argumentem mezi spotovým a forwardovým trhem. Podle Bianchetti, Carlicchi (2012) se nejedná o rozpor s principem bezarbitrážního trhu a důsledkem je naopak nutnost opustit tradiční koncept jediné bezrizikové diskontní křivky a přijmout realitu fragmentace trhu a celé škály diskontních křivek aplikovaných v různých situacích.

Cílem naší studie je analyzovat vztahy mezi klasickými dluhopisovými křivkami, swapovými křivkami, křivkami bazických přirážek a OIS křivkami. Při této analýze se nemůžeme vyhnout pojmu rizika protistrany, přirážky za riziko protistrany CVA, DVA, či BVA.[1] V poslední části práce se zaměříme na problematiku konstrukce bezrizikové výnosové křivky pro měny bez likvidního trhu OIS, tedy zejména na konstrukci CZK bezrizikové výnosové křivky. Odvození týkající se zejména mezi-měnových bazických přirážek čtenář nalezne v příloze.

2. Přehled současné literatury

Jedním z prvních předkrizových článků, které se věnují problematice kolateralizace derivátů je Johannes, Sundaresan (2003). Autoři upozorňují, že kolateralizací nelze odstranit kreditní riziko protistrany bez dodatečných nákladů a že sazba kolaterálu má vliv na diskontní faktory. V článku Johannes, Sundaresan (2007) autoři poukazují na dopady kolateralizace na swapové sazby a přicházejí s oceňovací formulí pro kolateralizované kontrakty. Dále ukazují, že když je derivát spojitě kolateralizován, potom diskontování derivátu sazbou kolaterálu je správné i když se tato sazba nerovná bezrizikové sazbě. Rovněž představují empirickou studii dynamiky USD swapových sazeb. Řada pozdějších prací pak čerpá z jejich myšlenky.

Pulman (2003) jako jeden z prvních upozorňuje na nevhodnost konstrukce výnosové křivky z depozitních, FRA/futures a swapových sazeb. Ve své studii se věnuje hlavně krátkému konci výnosové křivky a ukazuje, že např. používáním jednoměsíčního depozita v konstrukci tříměsíční swapové křivky (oproti standard-

1 Credit Value Adjustment, Debit Value Adjustment a Bilateral Value Adjustment

ním swapům s tříměsíční splatností pohyblivé nohy) se opomíjí nižší kreditní riziko v jednoměsíční sazbě. Ametrano, Bianchetti (2009) představují model, kde se soustředí na tzv. segmentaci trhu a používají metodu bootstrappingu pro odvození swapových sazeb pro každý tenor zvlášť (pevná sazba vs. 1M až 12M pohyblivá sazba). Autoři tak předpokládají více diskontních křivek pro jednu měnu, což ale nevylučuje arbitráž, a rovněž se nevěnují kolateralizaci a měnovým swapům.

Boenkost, Schmidt (2005) je jedním z prvních článků, který se výslovně věnuje oceňování úrokových a měnových swapů se započtením swapových přirážek a přichází z myšlenkou dvou diskontních faktorů. Kijima a kol. (2009) přichází s konzistentním oceněním USD/JPY měnových swapů, kde považuje USD Libor za bezrizikovou sazbu a dopočítává JPY diskontní sazbu. Chibane a kol. (2009) upozorňují na existenci swapových přirážek a ukazují, že ocenění pomocí jediné křivky vytváří arbitráž mezi úrokovými a měnovými swapy, a proto zavádí nový způsob bezarbitrážného ocenění se započtením swapových přirážek. Autoři pracují pouze se swapovými sazbami na bázi IBOR a nevěnují se kolateralizaci, resp. kreditnímu riziku protistrany.

Fujii a kol. (2010) rozšiřují práci Johannes, Sundaresan (2007) pro swapy kde je kolaterál skládán v jiné měně a konstruují bezarbitrážní vztahy pro kolateralizované i nekolateralizované úrokové a měnové swapy se započtením kotovaných swapových přirážek. Mercurio (2010) přebírá konstrukci diskontní křivky na základě OIS swapů, podobně jako Fujii a kol. (2010). Vlivem kolateralizace na oceňování derivátů se zabývá taky Piterbarg (2010) a nabízí Black-Scholesovou oceňovací formuli pro kolateralizované opce.

Ando (2012) a Ivashina a kol. (2012) se ve svých empirických studiích zaměřují na EUR/JPY resp. EUR/USD trh měnových swapů a zkoumají důvody pro existenci swapových bazických přirážek. Nezávisle na sobě se shodují, že za jejich volatilitou stojí stres na trhu nezajištěných úložek a výpůjček, v posledních letech hlavně kvůli Evropské dluhové krizi, která odstřihla Evropské banky od nezajištěného financování v USD. Autoři se nezaobírají oceňováním, jde pouze o empirické studie, které zkoumají faktory ovlivňující swapové přirážky.

Podle Hull, White (2013) jsou OIS sazby v současnosti nejlepším přiblížením bezrizikových sazeb a měly by se používat jako bezrizikové sazby pro oceňování všech derivátů v rizikově neutrálním prostředí. Pro úplnost ještě vyjmenujme další relevantní studie: Chibane (2012), Henrard (2009), Morini (2009), Tuckman, Porfirio (2003), Kijima a kol. (2009).

3. Bezriziková výnosová křivka, OIS křivka a přirážka za riziko protistrany

Východiskem našich úvah je připuštění existence nezanedbatelných kreditních a likviditních přirážek pro financování i těch nejdůvěryhodnějších subjektů mezinárodních finančních trhů, jako jsou vlády vyspělých zemí, mezinárodní banky, apod. Tržní úrokovou sazbu pro financování subjektu i, v měně C, a při splatnosti T lze obecně rozložit na (ideální) bezrizikovou úrokovou sazbu $r_0(C,T)$ a tržní přirážku za riziko:

$$r(i,C,T) = r_0(C,T) + s(i,C,T)\,. \tag{3.1}$$

Přirážka za riziko $s(i,C,T)$ je kompenzací za možné nesplacení závazků v měně C v časovém horizontu T. Jedná se tedy o kompenzaci za kreditní riziko, avšak vzhledem k rozdílné likviditě, resp. přístupu k likviditě (refinancování) v jednotlivých měnách tato přirážka odráží i riziko likvidity v dané měně. Příkladem je často rozdílné kreditní hodnocení závazků vlád nebo podniků v domácí a zahraniční měně.

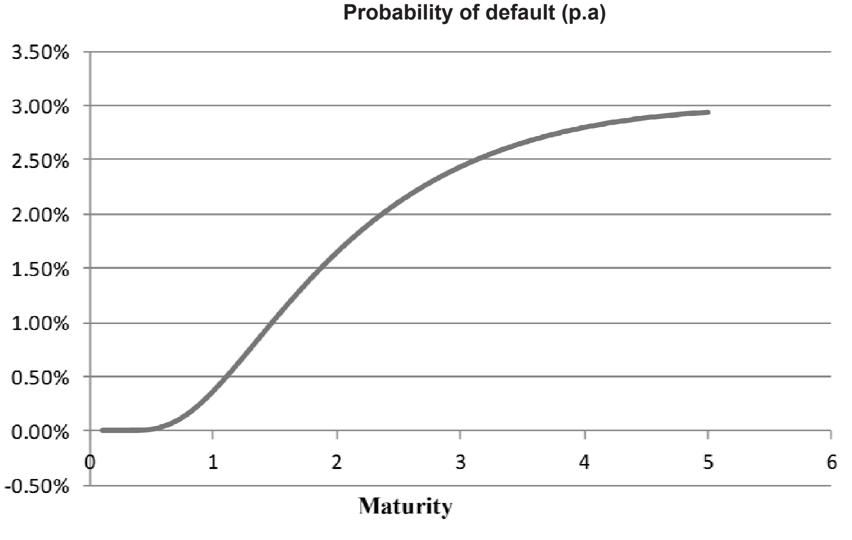
Pro účel analýzy úrokových sazeb na globálních finančních trzích budeme, pro danou měnu C, vycházet z předpokladu shodné průměrné rizikové přirážky IBOR (Inter-Bank Offered Rate) referenčních institucí $s_{\mathrm{IBOR}}(C,T)$ a ze shodné průměrné rizikové přirážky celého mezibankovního trhu $s_{\mathrm{M}}(C,T)$. IBOR referenční instituce představují nejvýznamnější a nejsilnější banky, jejichž referenční kotace představuji vlastní odhady sazeb, za které se tyto banky mohou financovat na nezajištěném trhu. Výše těchto sazeb je tedy často považována za subjektivně nízkou. Z tohoto důvodu budeme předpokládat, že $s_{\mathrm{IBOR}}(C,T) \leq s_{\mathrm{M}}(C,T)$ s tím, že realita finančního trhu v pokrizovém období je taková, že tato nerovnost je často významně ostrá, tedy skutečné tržní refinanční sazby jsou vyšší než referenční sazby IBOR. Rizikové přirážky se dále mohou lišit pro jednotlivé měny v závislosti na riziku likvidity (přístupu k refinancování). Tyto rozdíly nám umožní vysvětlit existenci bazických přirážek měnových swapů různých splatností.

Naším cílem je konstrukce co nejlepší aproximace ideální bezrizikové výnosové křivky $r_0(C,T)$ a následně analýza rizikových přirážek a různých cen instrumentů finančního trhu. V případě konstrukce výnosové křivky ze sazeb vládních dluhopisů výsledné diskontní faktory a anualizované úrokové sazby bezkupónových dluhopisů zahrnují rizikovou přirážku $s_{\mathrm{g}}(C,T)$. Jestliže se tedy přirážka za riziko pohybuje i u vyspělých zemí v řádu desítek či stovek bazických bodů pro tříleté nebo delší splatnosti, je rozdíl oproti hledané bezrizikové křivce nezanedbatelný. V případě křivky konstruované na základě swapových sazeb vycházíme z šestiměsíční sazby IBOR zahrnující $s_{\mathrm{IBOR}}(C,6M)$, resp. z očekávané budoucí výše této přirážky. Riziko referenčních bank sice může být o něco vyšší, než je riziko příslušné země, na druhou stranu krátkodobé riziko nesplácení je u vysoce hodnocených subjektů vždy podstatně nižší než dlouhodobé, jak je ilustrováno níže (viz obrázek 2). Tato přirážka je tedy potom zahrnuta i ve fixních sazbách IRS. Jestliže pro jednoduchost předpokládáme, že i očekávaná budoucí výše kreditní přirážky IBOR je konstantní, potom tato hodnota představuje rozdíl mezi teoretickou bezrizikovou výnosovou křivkou a křivkou odvozenou ze sazeb IRS/IBOR. Jak bylo uvedeno výše (obrázek 1, dole), tento rozdíl je i v normálních obdobích ne zcela zanedbatelný, v době finanční krize se však stává velmi volatilní při dosahování nepřijatelně vysokých hodnot.

V současnosti velmi vhodným přiblížením k ideální bezrizikové výnosové křivce je výnosová křivka konstruovaná ze sazeb OIS. Rozdíl takto konstruovaných sazeb a teoretické bezrizikové sazby odpovídá přirážce $s_{\mathrm{OIS}}(C,O/N)$, která je pro referenční finanční instituce s vysokým ratingem (AA a lepší) považována za téměř zanedbatelnou. Jak bude dále uvedeno, OIS je nástrojem spočívajícím ve výměně pevné a pohyblivé jednodenní (průměr O/N sazeb nezajištěných depozit referenčních bank) referenční sazby finančního trhu. Po technické stránce platby nejsou realizovány denně, ale na základě složené úrokové sazby placené zpravidla jednorázově pro OIS splatnosti do 1 roku a ročně pro delší splatnosti. Podobně jako v případě IRS sazeb lze OIS sazbu charakterizovat jako sazbu odpovídající tržnímu očekávání průměrných sazeb jednodenních depozit AA (nebo obecně na úrovni standardního ratingu referenčních bank) hodnocených finančních institucí. V případě zhoršení ratingu v průběhu jednoho (obchodního) dne je financovaná instituce vyřazena se skupiny AA hodnocených institucí a pro následující den jsou prostředky svěřeny jinému subjektu. Jediná možnost ztráty tedy spočívá v možnosti úvěrového selhání AA hodnocené instituce v horizontu jednoho obchodního dne a (anualizovaná) pravděpodobnost takové události je považována za praktickou nulovou. V každém případě je tato pravděpodobnost podstatně menší než anualizovaná pravděpodobnost selhání AA hodnocené instituce v horizontu šesti měsíců.

Tuto skutečnost lze teoreticky vysvětlit v kontextu Mertonova modelu, kde je selhání charakterizováno poklesem aktiv $A(T)$ pod výši zadlužení D, kde T je splatnost závazku. Jestliže předpokládáme, že výše aktiv sleduje geometrický Brownův pohyb $dA = \mu A dt + \sigma A dz$ a výše zadlužení je konstantní, pak u AA hodnocené instituce, kde $A(0) \gg D$, je (anualizovaná) pravděpodobnost poklesu $A(T)$ pod D ve velmi krátkém časovém horizontu prakticky nulová, avšak roste s delším časovým horizontem (viz Witzany, 2010 a ilustrační obrázek 2).

Obrázek 2
Anualizovaná pravděpodobnost úvěrového selhání vycházející z Mertonova modelu, jestliže *A*(0) = 2, *D* = 1, σ = 25%, a *μ* = 2 %



Nízkou pravděpodobnost selhání AA instituce v O/N časovém horizontu lze doložit i na základě historických dat: podle ratingové databáze Moody's pokrývající období 1970–2012 neexistuje historický případ, kdy by instituce hodnocená jako Aa v horizontu jednoho, nebo dokonce tří dní, selhala. Počet historických selhání Aa institucí v horizontu šesti měsíců je však nenulový (4 z celkového počtu 2016 pozorovaných selhání). Z historicky nulové míry jednodenního selhání Aa institucí však nelze vyvodit, že toto riziko je nulové. To lze opět ilustrovat v kontextu teoretického Mertonova modelu. Jestliže předpokládáme, že výše aktiv sleduje difúzně-skokový proces, potom anualizovaná pravděpodobnost selhání zůstává nenulová v jakkoliv krátkém časovém horizontu z důvodu možnosti skokového poklesu aktiv pod hranici zadlužení D. Alternativním vysvětlení rizika selhání Aa instituce ve velmi krátkém časovém horizontu je nejistota určení výchozí hodnoty aktiv $A(0)$, tedy ekvivalentně samotného ratingu. Jinými slovy, finanční situace společnosti hodnocené jako Aa již zdaleka nemusí odpovídat tomuto stupni z důvodu chyby nebo pomalé reakce na straně ratingové agentury. Tedy závěrem lze říct, že sazby OIS sice představují kvalitativně lepší přiblížení k bezrizikovým úrokovým sazbám v porovnání se sazbami IRS/IBOR nebo s výnosy státních dluhopisů, nicméně v časech zvýšeného kreditního rizika na trhu nejsou ani OIS sazby ideálně bezrizikové, a proto nelze do budoucna vyloučit hledání ještě přesnějšího přiblížení k ideální bezrizikové křivce.

Již samotné zavedení OIS výnosové křivky přináší určité komplikace do klasických přístupů k oceňování derivátů, jako jsou úrokové swapy, FRA, nebo opční kontrakty. Pro pochopení těchto rozdílů je třeba analyzovat vliv rizika protistrany, který lze charakterizovat pomocí konceptu CVA (Credit Value Adjustment), resp. DVA (Debit Value Adjustment), či BVA (Billateral Value Adjutment). CVA je přirážkou kompenzující možné ztráty vyplývající z možnosti úvěrového selhání protistrany, aniž by byla brána v úvahu možnost vlastního selhání. V rizikově neutrálním prostředí ji lze vyjádřit vztahem Hull, White (2012a):

$$\mathrm{CVA}=\mathrm{E}\left[\int_0^T (1-R_c(t))f^+(t)q_c(t)dt\right],$$

kde $q_c(t)dt$ je pravděpodobnost selhání protistrany v časovém intervalu $(t,t+dt]$, $f^+(t) = \max(f(t), 0)$ je současná hodnota expozice vůči protistraně a $R_c(t)$ je výtěžnost pohledávek za protistranou v případě selhání v čase t. Na druhou stranu, DVA zohledňuje možnost (opci) selhání a nevypořádání kontraktu z pohledu oceňující strany, tedy

$$\mathrm{DVA}=\mathrm{E}\left[\int_0^T (1-R_d(t))f^-(t)q_d(t)dt\right],$$

kde $q_d(t)dt$ je pravděpodobnost selhání kontrakt oceňující strany v časovém intervalu $(t,t+dt]$, $f^-(t) = \max(-f(t), 0)$ je současná hodnota expozice z pohledu druhé protistrany a $R_d(t)$ je výtěžnost pohledávek za oceňující stranou v případě selhání v čase t. Jestliže vyloučíme možnost selhání obou protistran do vypořádání kontraktu, potom je současná hodnota derivátu zohledňující riziko obou protistran vyjádřena vztahem:

$$f = f_{\text{nd}} + BVA,\ \text{kde } BVA = DVA - CVA, \tag{3.2}$$

a kde f_{nd} je hodnota derivátu za předpokladu bezrizikovosti obou protistran. Pravděpodobnost selhání obou protistran do času vypořádání T lze zanedbat, jsou-li jevy úvěrového selhání těchto protistran nekorelované, nebo málo korelované, a vlastní pravděpodobnosti selhání nízké. Uvedený vztah lze zpřesnit zavedením časů selhání τ_1 a τ_2 se sdruženým rozdělením zachycujícím korelaci selhání.

Na základě poměrně jednoduché analýzy (Hull, White, 2012b) vztahu (3.2) lze bezrizikovou diskontní křivku za jistých předpokladů nahradit diskontní křivku zahrnující kreditní riziko protistrany:

1. V případě, kdy hodnota derivátu s výplatou v čase T je vždy aktivem pro oceňující protistranu, tedy vždy $f(T) \geq 0$, lze pro účel správného ocenění derivátu diskontní sazbu nahradit sazbou zohledňující riziko protistrany c v měně DC, tedy $f = f_{\text{nd}} e^{-s(c,DC,T)T}$.
2. V případě, kdy hodnota derivátu s výplatou v čase T je vždy závazkem pro oceňující protistranu, tedy vždy $f(T) \leq 0$, lze sazbu nahradit diskontní sazbou zohledňující riziko kontrakt oceňující strany d, tedy $f = f_{\text{nd}} e^{-s(c,DC,T)T}$.
3. V případě, kdy riziko obou protistran je shodné s přirážkou $s(c, DC, T)$, lze diskontní sazbu pro ohodnocení derivátu s kladnou nebo zápornou výplatou v čase T nahradit sazbou zohledňující riziko obou protistran, tedy $f = f_{\text{nd}} e^{-s(c,DC,T)T}$.
4. Jestliže, je derivativní kontrakt průběžně plně zajišťován kolaterálem úročeným sazbou r^*, potom lze touto sazbou nahradit bezrizikovou diskontní sazbu, tedy $f = f_{\text{nd}} e^{(r^* - r_0)T}$. Jestliže úroková sazba kolaterálu je rovna bezrizikové úrokové sazbě, potom $f = f_{\text{nd}}$.

K jednotlivým uvedeným případům je třeba poznamenat, že bezriziková úroková sazba vždy musí vstupovat do oceňovacího modelu (např. Black-Scholesova formule) jako očekávaný výnos aktiv v rizikově-neutrálním prostředí. Z pohledu naší následující analýzy je nejvýznamnější případ, kdy je derivativní kontrakt plně zajištěn kolaterálem přinášejícím úrokovou sazbu OIS, kterou zároveň budeme považovat za sazbu bezrizikovou. Tato sazba tak může vstupovat do oceňovacích modelů jako sazba diskontní i jako očekávaný růst ceny aktiv v rizikově neutrálním prostředí. V dalším textu se zaměříme na způsoby oceňování úrokových derivátů při vhodné volbě diskontních křivek.

4. Úrokový swap

Úrokový swap je kontraktem, při němž dochází k výměně pevných a plovoucích úrokových sazeb ze stanovené nominální částky a s dohodnutou splatností. Reálná hodnota úrokového swapu je rovna rozdílu současných hodnot budoucích peněžních toků fixní a pohyblivé nohy swapu. Při uzavření nedochází k žádnému vyrovnání, předpokládáme, že mezi protistranami existuje rovnováha, tj. současná hodnota pevné nohy je rovna současné hodnotě pohyblivé nohy

$$\sum_{t=1}^{n} f_t \delta_{1,t} DF_{d,t} = r_m \sum_{t=1}^{m} \delta_{2,t} DF_{d,t}, \tag{4.1}$$

kde f_t jsou forwardové sazby odpovídající referenčním sazbám pohyblivé nohy pro období t-1 až t, $\delta_{i,t} = \dfrac{D_t}{B}$ je část roku mezi úrokovým obdobím t-1 a t pro i-tou nohu (i = 1,2), D_t je počet dní úrokového období t-1 až t, B je počet dní v roku podle konvence příslušné měny (např. pro EUR, USD i CZK 360), r_m je kotovaná swapová sazba a $DF_{d,t}$ jsou diskontní faktory (současná hodnota jednotkové výplaty v čase t) a obvykle jde o různá úrokové období ($m \neq n$).

4.1 Tradiční a zobecněná konstrukce diskontní křivky

Tradiční konstrukce bezrizikové výnosové křivky (Witzany, 2011) vychází z argumentu, že při teoretickém doplnění plovoucí a fixní nohy o protichůdné platby nominální částky při splatnosti je současná hodnota plovoucí nohy rovna 100% nominální částky, tedy

$$1 = r_m \sum_{t=1}^{m} \delta_{2,t} DF_{d,t} + DF_{d,m}\,. \tag{4.2}$$

Jinými slovy předpokládáme, že forwardové sazby použité v (4.1) odpovídají bezrizikové ceně peněz pro dané období, tedy $f_t = f_{d,t}$, kde

$$f_{d,t} = \frac{1}{\delta_{1,t}}\left(\frac{DF_{d,t-1}}{DF_{d,t}} - 1\right) \tag{4.3}$$

jsou forwardové sazby implikované diskontní křivkou $\langle DF_{d,t} \rangle$. Na druhou stranu, z forwardových sazeb lze dopočíst diskontní faktory dle (4.3). Podobně, jsou-li dány tržní swapové sazby $\langle r_m \rangle$, lze pomocí (4.2) rekurzivně vypočíst diskontní faktory

$$DF_{d,m} = \frac{1 - r_m \sum_{t=1}^{m-1} \delta_{2,t} DF_{d,t}}{1 + \delta_{2,m} r_m}\,. \tag{4.4}$$

a tedy i forwardové sazby. Pro kratší splatnosti do jednoho roku jsou přitom využívány spíše referenční sazby a pro splatnosti mezi standardními kotacemi je aplikována vhodná metoda interpolace nebo extrapolace úrokových sazeb. Z diskontních faktorů lze naopak pomocí (4.2) vypočíst rovnovážné swapové sazby, konkrétně:

$$r_m = \frac{1 - DF_{d,n}}{\sum_{t=1}^{m} \delta_{2,t} DF_{d,t}}. \tag{4.5}$$

V tradičním světě finanční matematiky tedy jakákoliv sada údajů z $\langle r_m \rangle$, $\langle DF_{d,t} \rangle$ a $\langle f_{d,t} \rangle$ určuje zbylé dvě. V pokrizovém období je však nutné tento princip opustit.

Podstata našeho přístupu spočívá v upuštění od předpokladu, že $f_t = f_{d,t}$. Tento předpoklad nemůže platit, jestliže je pro diskontování použita bezriziková úroková křivka $\langle DF_{d,t} \rangle$, avšak referenční sazby IBOR zahrnují nezanedbatelné kreditní riziko.

Forwardové sazby vypočtené dle (4.3) představují bezrizikovou cenu financování, a tedy $f_t \neq f_{d,t}$, kde f_t je forwardová sazba použitá v (4.1). Podobně již neplatí vztah (4.2). Zobecněné forwardové sazby lze nicméně rekurzivně vypočíst dle (4.1), jsou-li dány tržní swapové sazby $\langle r_m \rangle$ a diskontní křivka $\langle DF_{d,t} \rangle$:

$$f_n = \frac{r_m \sum_{t=1}^{m} \delta_{2,t} DF_{d,t} - \sum_{t=1}^{n-1} f_t \delta_{1,t} DF_{d,t}}{\delta_{1,n} DF_{d,n}}. \tag{4.6}$$

V tomto smyslu hovoříme o implikovaných forwardových sazbách. Podobně, jsou-li dány diskontní faktory $\langle DF_{d,t} \rangle$ a forwardové sazby $\langle r_m \rangle$, je možné vypočíst rovnovážné swapové sazby

$$r_m = \frac{\sum_{t=1}^{n} f_t \delta_{1,t} DF_{d,t}}{\sum_{t=1}^{m} \delta_{2,t} DF_{d,t}}. \tag{4.7}$$

a naopak diskontní faktory lze dopočíst z $\langle r_m \rangle$ a $\langle f_{d,t} \rangle$. V pokrizovém světě jsou již tedy potřeba vždy dvě sady faktorů z $\langle r_m \rangle$, $\langle DF_{d,t} \rangle$ a $\langle f_{d,t} \rangle$ pro určení třetí zbývající. Základní otázkou však zůstává, jak určit bezrizikové diskontní faktory $DF_{d,t,}$ která se liší od tradiční výnosové křivky odvozené na základě (4.4).

4.2 OIS (Overnight Indexed Swap)

Jak již bylo uvedeno dříve, OIS je úrokový swap, ve kterém dochází k pravidelné výměně fixní sazby za pohyblivou sazbu, která je rovna geometrickému průměru jednodenních ONIA sazeb po dobu trvání kontraktu. Sazby ONIA[2] vyjadřují vážený průměr úrokových sazeb nezajištěných jednodenních O/N depozit uložených referenčními bankami na mezibankovním trhu, kde váhami jsou objemy jednotlivých depozit. Tyto jednodenní sazby jsou v úzkém vztahu s úrokovými sazbami centrálních bank, cílem kterých je usměrňovat vývoj úrokových sazeb v ekonomice.

Tržní účastníci se tedy mohou pomocí OIS swapů částečně zajistit proti změnám úrokových sazeb centrálních bank, a naopak, OIS swapové sazby do značné míry zobrazují tržní očekávání úrokových sazeb centrálních bank. Jestliže jsou např. OIS sazby nižší než aktuální jednodenní sazby, potom trh signalizuje budoucí uvolnění měnové politiky. Tato tržní očekávání jsou samozřejmě započtena i v cenách dalších úrokových instrumentů (např. FRA, futures, úrokové swapy), které ale v sobě nesou vyšší kreditní a likviditní riziko a mohou tak zkreslovat informace o očekávaných úrokových sazbách centrálních bank. OIS sazby mohou být zdeformované při nízké likviditě trhu a tehdy se jejich použití k odhadnutí vývoje měnové politiky jeví jako problematické. Navíc, protože podkladová referenční sazba u OIS swapů je založena na skutečných zobchodovaných jednodenních sazbách, tak OIS swapy lépe odrážejí tržní podmínky a jejich očekávání.

2 ONIA – OverNight Index Average, v případě EUR jde o sazbu EONIA, v případě USD je to Federal funds effective rate a pro CZK je to CZEONIA (Czech OverNight Index Average).

Diskontování na sazbách OIS

Využití OIS křivky pro diskontování derivátových peněžních toků vzbudilo v posledních letech velký zájem v akademickém světě i mezi tržními profesionály. Derivátové transakce na OTC trzích jsou většinou uzavírány bilaterálně pod rámcovou smlouvou ISDA[3]. Snížení důvěry na trzích v posledních letech vedlo banky k hledání možností snížení kreditních rizik plynoucích mj. z otevřených derivátových pozic. Dnes je běžnou praxí, že součástí ISDA smlouvy je i dodatek CSA,[4] který stanovuje pravidla a podmínky finančního zajištění vzájemných derivátových transakcí. Při pohybu úrokových sazeb dochází ke změně reálné hodnoty derivátů a účastníkovi, který vykazuje kladnou reálnou hodnotu, vzniká pohledávka a kreditní riziko za protistranou. Toto riziko je sníženo tím, že účastník obdrží kolaterál ve formě likvidních cenných papírů nebo hotovosti, tj. derivátové transakce jsou *kolateralizovány.*

Podle průzkumu ISDA (2012) bylo 84 % všech OTC derivátových transakcí zobchodovaných největšími bankami v průběhu roku 2011 předmětem kolaterálových dohod, 71 % bank dorovnává hodnotu finančního kolaterálu denně, 76 % doručovaného kolaterálu tvoří peněžní hotovost a 21 % vládní cenné papíry. Tyto podíly stoupají každým rokem.

Poskytnutý peněžní kolaterál je nejčastěji úročen jednodenní sazbou typu ONIA a kolateralizovaná portfolia jsou přeceňována denně, tj. požadavek na doplnění finančního zajištění (margin call) se počítá každý den. Při dokonalém zajištění se hodnota kolaterálu při splatnosti musí rovnat reálné hodnotě swapu při splatnosti T, tj. čisté úrokové platbě v čase T. Jednodenní sazba, kterou je kolaterál úročen je ekvivalentní fixní OIS sazbě pro příslušnou splatnost. Rovnost hodnoty kolaterálu a reálné hodnoty úrokového swapu nastává pouze tehdy, pokud budou úrokové platby swapu diskontovány na křivce OIS.

Pohyblivá sazba r OIS swapu se spočte jako roční efektivní úroková sazba z jednodenních sazeb ONIA za příslušné úrokové období

$$r = \left(\prod_{t=1}^{n_b} \left(1 + \frac{r_t \times n_t}{360} \right) - 1 \right) \frac{360}{n},$$

kde r_t je jednodenní sazba ONIA pro den t a danou měnu, n_t je počet dní, po které platí sazba r_t (většinou $n_t - 1$, v případě víkendu je $n_t - 3$ apod.), n_b je počet obchodních dní pro dané úrokové období (tj. počet sazeb r_t) a n je celkový počet dní úrokového období, který se řídí konvenci příslušného peněžního trhu. Jinými slovy, výši úrokové platby u pohyblivé nohy dostaneme tak, že investujeme jistinu swapu za jednodenní úrokovou sazbu ONIA a opakujeme transakci na jednodenní bázi (další den investujeme jistinu plus úrok). Přitom je vždy volena protistrana z panelu referenčních bank.

---

3 ISDA – International Swaps and Derivatives Association master agreement, české banky obchodují také pod rámcovou smlouvou o obchodování na finančním trhu publikovanou Českou bankovní asociací (ČBA) a příslušnou produktovou přílohou č. 5 pro derivátové transakce.

4 CSA – Credit support annex, v případě ČBA jde o přílohu č. 11 o udržování finančního zajištění.

Při daných OIS swapových sazbách můžeme tedy aplikovat tradiční výpočet diskontních faktorů:

$$DF_{OIS,n} = \frac{1 - r_{OIS,n}\sum_{t=1}^{n-1}\delta_{2,t}DF_{OIS,t}}{1+\delta_{2,n}r_{OIS,n}}. \tag{4.8}$$

Implikovaná forwardová OIS sazba $f_{OIS,n}$ a OIS *parová* swapová sazba $r_{OIS,m}$ jsou pak rovny

$$f_{OIS,n} = \frac{1}{\delta_{1,n}}\left(\frac{DF_{OIS,n-1}}{DF_{OIS,n}} - 1\right) \text{ a} \tag{4.9}$$

$$r_{OIS,m} = \frac{1 - DF_{OIS,n}}{\sum_{t=1}^{m}\delta_{2,t}DF_{OIS,t}}. \tag{4.10}$$

4.3 Kolateralizovaný úrokový swap

V případě kolateralizovaného swapu s nulovou prahovou částkou, denním přeceněním a symetrickým peněžním kolaterálem, který je úročen jednodenní ONIA sazbou, jsou OIS sazby vhodným kandidátem pro diskontování budoucích peněžních toků. Pokud jsou kotované úrokové swapy kolateralizovány,[5] pak musíme odvodit implikované forwardové sazby z kotovaných swapových sazeb a dopočtených OIS diskontních faktorů. OIS diskontováním se změní implikovaná forwardová křivka, pro kterou pak platí

$$f_n = \frac{r_m\sum_{t=1}^{m}\delta_{2,t}DF_{OIS,t} - \sum_{t=1}^{n-1}f_t\delta_{1,t}DF_{OIS,t}}{\delta_{1,n}DF_{OIS,n}}. \tag{4.11}$$

Jedním z důsledků změny diskontní křivky je, že implikovaná forwardová sazba f_n kolateralizovaného swapu je jiná než podle (4.9). Swapová sazba r_m, pro kterou je počáteční RH nulová je pak rovna

$$r_m = \frac{\sum_{t=1}^{n}f_t\delta_{1,t}DF_{OIS,t}}{\sum_{t=1}^{m}\delta_{2,t}DF_{OIS,t}}. \tag{4.12}$$

4.4 Diskontní křivka definována pomocí přirážky k referenční sazbě

Předchozí případy zobecníme tak, že pro diskontování budoucích peněžních toků použijeme forwardovou referenční úrokovou sazbu pohyblivé nohy swapu plus příslušnou přirážku podle splatnosti (IBOR + spread). Pro takové *nezajištěné financování* platí bezarbitrážní vztah

5 Pro naše účely budeme výrazem „kolateralizován“ rozumět „diskontován na křivce OIS“.

$$1=\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}\left(f_t+s_t\right)DF_{d,t}+DF_{d,n}\ . \tag{4.13}$$

Diskontováním pomocí $f_t + s_t$ z (4.13) zacházíme se všemi případy stejně; např. pro OIS volíme $s_n = r_{OIS,n} - r_n$ (což může být záporný spread) a dostáváme vztah (4.8). Pro určení f_t a $DF_{d,t}$ tak potřebujeme swapový trh s pohyblivou nohou f_t,

$$\sum_{t=1}^{n}f_t\delta_{1,t}DF_{d,t}=r_{n,s}\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{d,t}\ , \tag{4.14}$$

který však existuje, pouze když se i ostatní subjekty na trhu financují za stejný spread $f_t + s_t$. To je ztěžka představitelné a $r_{n,s}$ musíme aproximovat pomocí existujícího swapového trhu, např. nekolateralizovaného trhu r_n z (4.5). Pak

$$\sum_{t=1}^{n}f_t\delta_{1,t}DF_{d,t}=r_n\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{d,t}\ . \tag{4.15}$$

Dosazením (4.15) do (4.13) získáme diskontní faktory

$$DF_{d,n}=\frac{1-\left(r_n+s_n\right)\sum_{t=1}^{n-1}\delta_{2,t}DF_{d,t}}{1+\delta_{2,n}\left(r_n+s_n\right)}\ , \tag{4.16}$$

a forwardové sazby f_n

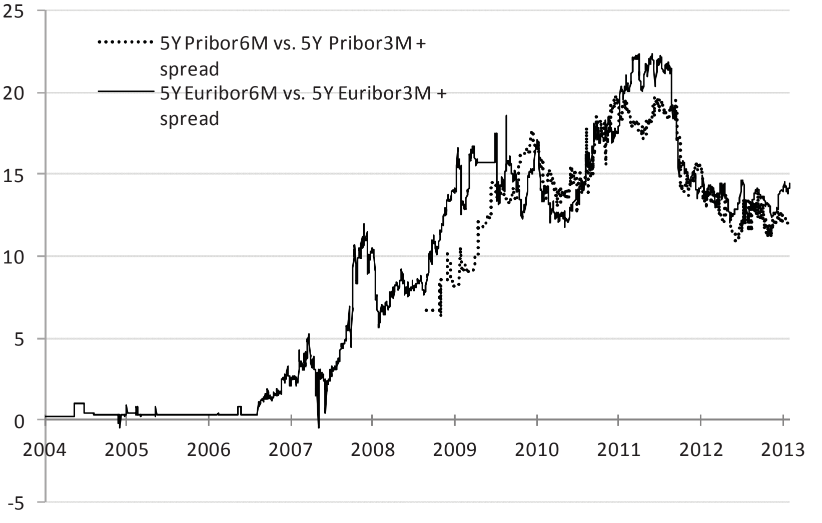
$$f_n=\frac{r_n\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{d,t}-\sum_{t=1}^{n-1}f_t\delta_{1,t}DF_{d,t}}{\delta_{1,n}DF_{d,n}}\ . \tag{4.17}$$

Důvodem pro uvedené obecné diskontování na sazbách $f_t + s_t$ (IBOR + spread) je to, že pomocí struktury přirážek s_t můžeme zobrazit úroveň diskontní křivky vzhledem k forwardové křivce, podobně jako když bazické přirážky určují úroveň jedné forwardové křivky vůči druhé.

5. Bazický swap

Bazickým (basis) swapem budeme nazývat úrokový swap typu float-float v jedné měně, ale s různými tenory (délkami úrokových období), tj. dochází k pravidelné výměně plateb navázaných na jeden index za platby navázané na jiný index plus přirážka (spread). V minulosti byly tyto spready téměř nulové, ale změna v posuzování rizika pro jednotlivé tenory způsobila (většinou) kladné spready (viz obrázek 3), které vyjadřují větší kreditní a likviditní riziko u delších tenorů. Např. v případě výměny 6M IBOR a 3M IBOR sazeb lze tento spread aproximovat rozdílem rizikových přirážek $s_{\mathrm{IBOR}}(C, 6M) - s_{\mathrm{IBOR}}(C, 3M)$, který je v případě zvýšeného kreditního rizika kladný.

Obrázek 3
Přirážky pětiletých bazických swapů 3M/6M Euribor a 3M/6M Pribor



Při uzavření je současná hodnota jedné nohy rovná současné hodnotě druhé nohy

$$\sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{d,t} = \sum_{t=1}^{m}\left(f_{2,t} + bs_m\right)\delta_{2,t}DF_{d,t}, \tag{5.1}$$

kde $f_{i,t}$, jsou implikované forwardové referenční sazby a bs_m je bazická swapová přirážka, která může nabývat kladných i záporných hodnot. Při nulové reálné hodnotě na začátku kontraktu můžeme tento spread vyjádřit jako

$$bs_m = \frac{\sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{d,t} - \sum_{t=1}^{m} f_{2,t}\delta_{2,t}DF_{d,t}}{\sum_{t=1}^{m}\delta_{2,t}DF_{d,t}}. \tag{5.2}$$

Reálná hodnota bazického swapu tak závisí na 3 křivkách. To např. znamená, že při dané diskontní křivce a forwardových sazbách jedné nohy dopočteme z křivky bazických spreadů forwardové sazby druhé nohy. Podobně můžeme postupovat, je-li dána jakákoliv trojice křivek z $\left\langle DF_{d,m}\right\rangle$, $\left\langle f_{1,m}\right\rangle$, $\left\langle f_{2,m}\right\rangle$ a $\left\langle bs_m\right\rangle$, k dopočtení zbývající. Problematikou zahrnutí bazických swapových přirážek do výpočtu reálné hodnoty úrokových derivátů se zabývá např. Chibane a kol. (2009).

V případě, že diskontní faktory $DF_{d,t}$ jsou vypočteny ze swapových sazeb, u kterých je forwardová referenční sazba pohyblivé nohy rovna např. $f_{1,t}$, platí

$$r_{1,n}\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{d,t} = \sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{d,t} = 1 - DF_{d,n}. \tag{5.3}$$

Vypočteme diskontní faktory

$$DF_{d,n} = \frac{1 - r_{1,n}\sum_{t=1}^{n-1}\delta_{1,t} DF_{d,t}}{1 + \delta_{1,n} r_{1,n}},$$

forwardové sazby $f_{1,t}$

$$f_{1,t} = \frac{1}{\delta_{1,t}}\left(\frac{DF_{d,t-1}}{DF_{d,t}} - 1\right),$$

a dosazením do (5.1) dopočteme $f_{2,m}$

$$f_{2,m} = \frac{1}{\delta_{2,m} DF_{d,m}}\left(r_{1,n}\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t} DF_{d,t} - bs_m \sum_{t=1}^{m}\delta_{2,t} DF_{d,t} - \sum_{t=1}^{m-1} f_{2,t}\delta_{2,t} DF_{d,t}\right). \tag{5.4}$$

5.1 Kolateralizovaný bazický swap

Uvažme nyní kolateralizovaný bazický swap splňující při uzavření (5.1). Diskontní faktory $DF_{OIS,t}$ dopočteme z OIS swapové křivky v (4.8). V případě, že swapové sazby fix-float mají forwardovou referenční sazbu pohyblivé nohy rovnou $f_{1,t}$ a že pro zjednodušení zápisu budeme předpokládat úrokové platby ve stejné dny (stejné $\delta_{1,t}$ pro fixní i pohyblivou nohu), pak podle (4.11) můžeme psát

$$f_{1,n} = \frac{r_m \sum_{t=1}^{m}\delta_{1,t} DF_{OIS,t} - \sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t} DF_{OIS,t}}{\delta_{1,n} DF_{OIS,n}},$$

kde r_m je kotovaná swapová sazba pro splatnost *m*. Následně rekurzivně dopočteme forwardové sazby $f_{2,m}$ podle (5.4)

$$f_{2,m} = \frac{1}{\delta_{2,m} DF_{OIS,m}}\left(\sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t} DF_{OIS,t} - bs_m \sum_{t=1}^{m}\delta_{2,t} DF_{OIS,t} - \sum_{t=1}^{m-1} f_{2,t}\delta_{2,t} DF_{OIS,t}\right),$$

a příslušné diskontní faktory

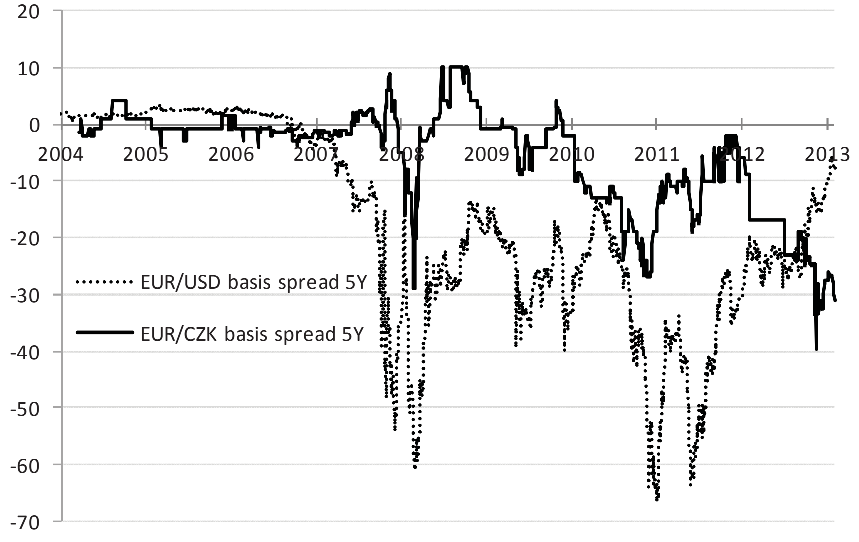
$$DF_{2,t} = DF_{2,t-2}\frac{1}{1 + f_{2,t}\delta_{2,t}}.$$

6. Měnový swap

Měnový swap (Cross Currency Swap, CCS) je úrokový swap, ve kterém dochází k pravidelným úrokovým platbám v různých měnách a směnný kurz pro výměnu počáteční a koncové jistiny je sjednán při uzavření kontraktu. Mechanismus měnových a bazických swapů je detailně zpracován např. v Tuckman, Porfirio (2003).

Tradiční postup předpokládá u měnových i bazických swapů s pohyblivými nohami (float-float) nulové bazické přirážky, tj. abstrahuje od kreditních a likviditních rizik a diskontuje budoucí peněžní toky na swapových sazbách. Současná hodnota každé nohy swapu je v tradičním přístupu rovná jeho nominální hodnotě. Velikost spreadu u jedné nohy měnového swapu byla v minulosti v řádu několik bazických bodů (bps) což bylo často pro účely oceňování zanedbáváno. V současnosti jsou ale s měnovým swapem spojeny vyšší náklady s financováním jedné měny v porovnání s náklady s financováním měny druhé. Dočasný převod aktiv nebo pasiv do jiné měny je spojen s dodatečnou kreditní a likviditní prémii ve formě spreadu u jedné nohy swapu (obrázek 4).

Obrázek 4
Pětileté EUR/USD a EUR/CZK bazické swapové přirážky (3M USD LIBOR vs. Euribor + spread, resp. 3M Euribor vs. 3M Pribor + spread) od roku 2005



Zdroj: Bloomberg

Rovnováha mezi nabídkou a poptávkou po dočasné výměně dvou měn je hlavním hnacím motorem přirážek měnových swapů. Domácí banky buď

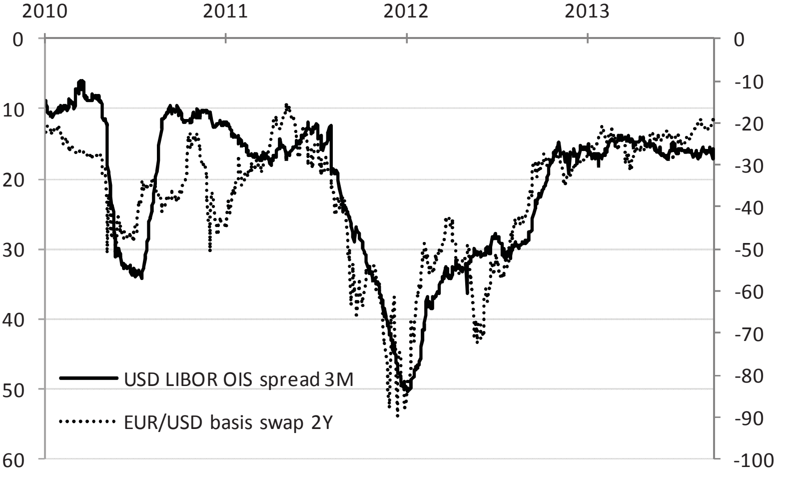
a) financují domácí aktiva přes zahraniční výpůjčky a využívají poptávkovou stranu swapového trhu (poptávka po domácí měně), nebo

b) financují zahraniční aktiva domácími výpůjčkami a využívají nabídkovou stranu swapového trhu (nabídka domácí měny).

Aby nebyla porušena rovnováha, každý z případů vyžaduje druhou stranu transakce. Zahraniční subjekty tedy v případě a) vydávají dluh v domácí měně a jsou partnery domácím bankám na swapovém trhu, nebo v případě b) nakupují domácí aktiva a na swapovém trhu poskytují domácím bankám zahraniční likviditu. Vychýlení jedné strany rovnice způsobuje volatilitu swapových spreadů, kterou navíc znásobuje nižší likvidita na trzích spojena s nižší úvěrovou a výpůjční aktivitou.

Např. od počátku krize v roce 2007 evropské banky zápasí s nedostatkem USD. Jedním z důvodů je značný objem dolarových aktiv držených evropskými bankami a financovaných krátkodobými výpůjčkami od svých amerických protějšků. Jestliže si evropská banka nemůže pro financování dolarových aktiv půjčit USD přímo (např. v případě zhoršených tržních podmínek), využije pak trh měnových swapů. Mezibankovní dolarové výpůjčky jsou nestabilním zdrojem financování a poptávka po nich je v zhoršených tržních podmínkách větší než nabídka a právě tato nerovnováha pak vede k tlaku na swapové spready (viz obrázek 5).

Obrázek 5
USD Libor-OIS spread v bps (levá strana, invertováno) a spread EUR/USD 2-letého měnového swapu



Pozn.: Mezibankovní nedůvěra tlačí na rozšiřování swapových spreadů.
Zdroj: Bloomberg

Na základě klasického arbitrážního argumentu lze s použitím terminologie zavedené v Sekci 2 spread mezi měnami *C*1 a *C*2 při splatnosti swapu *T*, přičítaný k plovoucí sazbě *C*2, vyjádřit přibližně jako

$$BS_{FX} \approx \left[s_M(C_2,T) - s_{\text{IBOR}}(C_2,3M) \right] - \left[s_M(C_1,T) - s_{\text{IBOR}}(C_1,3M) \right]. \tag{6.1}$$

Protože derivát má při uzavření nulovou reálnou hodnotu (nebo blízkou nule, až na bid offer spread), platí, že současná hodnota jedné nohy je rovna současné hodnotě druhé nohy. Při výpočtu reálné hodnoty CCS je proto nutné použít kotované bazické spready. Při diskontování swapové nohy s nenulovým spreadem použijeme diskontní faktory, které tento spread zohlední:

$$\sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{1,t} + DF_{1,n} = \sum_{t=1}^{n} \left(f_{2,t} + BS_n \right)\delta_{2,t}DF_{2,t} + DF_{2,n}, \tag{6.2}$$

kde $f_{j,t}$ je forwardová referenční sazba pro období t-1 *až t,* $\delta_{j,t} = \frac{D_{j,t}}{B_j}$ je část roku, $DF_{j,t}$ je diskontní faktor pro měny j=1,2 a BS_n sjednaný bazický spread (při uzavření swapu předpokládáme, že použitý swapový směnný kurz je roven tržnímu spotovému kurzu a proto ho pro zjednodušení neuvádíme). Diskontní faktory $DF_{2,t}$, t = 1, ..., n implikované z bazické swapové křivky a z diskontních faktorů $DF_{1,t}$, t = 1, ..., n dopočteme tak, aby platila rovnost (6.2). Pro zjednodušení zápisu předpokládáme v (6.2) a dále stejnou frekvenci výplaty úroků.

V případě, kdy diskontní faktory $DF_{1,t}$ jsou spočteny ze swapových sazeb, u kterých je referenční sazba pohyblivé nohy rovna $f_{1,t}$, podle (4.2) platí

$$r_{1,n}\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{1,t} = \sum_{t=1}^{n}f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{1,t} = 1 - DF_{1,n} \tag{6.3}$$

Dosazením (6.3) do (6.2) dostáváme

$$1 = \sum_{t=1}^{n}\left(f_{2,t} + BS_n\right)\delta_{2,t}DF_{2,t} + DF_{2,n}. \tag{6.4}$$

Podobně pro druhou nohu musí platit

$$r_{2,n}\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t} = \sum_{t=1}^{n}f_{2,t}\delta_{2,t}DF_{2,t}. \tag{6.5}$$

Dosazením (6.5) do (6.4) můžeme napsat

$$\left(r_{2,n} + BS_n\right)\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t} = 1 - DF_{2,n}, \tag{6.6}$$

z čehož odvodíme diskontní faktory $DF_{2,t}$.

Pro první období máme

$$DF_{2,1} = \frac{1}{1 + \left(r_{2,1} + BS_1\right)\delta_{2,1}},$$

kde $r_{2,1}$ je spotová sazba pro první období (např. 6M IBOR), BS_1 je bazická přirážka pro první období (např. 6M) a $\delta_{2,1}$ je část roku pro první období. Každý další diskontní faktor dopočteme z předchozích diskontních faktorů z (6.6)

$$DF_{2,n} = \frac{1 - \left(r_{2,n} + BS_n\right)\sum_{t=1}^{n-1}\delta_{2,t}DF_{2,t}}{1 + \left(r_{2,n} + BS_n\right)\delta_{2,n}}. \tag{6.7}$$

Forwardové sazby $f_{2,n}$ odvodíme z (6.5)

$$f_{2,n} = \frac{r_{2,n}\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t} - \sum_{t=1}^{n-1}f_{2,t}\delta_{2,t}DF_{2,t}}{\delta_{2,n}DF_{2,n}}. \tag{6.8}$$

V případě nenulového spreadu BS_n tedy používáme dvě různé křivky, $DF_{1,n}$ pro diskontování první nohy a $DF_{2,n}$ pro odhad $f_{2,n}$ a diskontování druhé nohy.

6.1 Kolateralizovaný měnový swap

Nyní předpokládejme, že výše uvedený měnový swap je kolateralizován jednodenní ONIA sazbou v měně první nohy swapu a zároveň, že touto (prakticky bezrizikovou) sazbou je diskontován peněžní tok první nohy. Musí platit, že současná hodnota první nohy je rovna současné hodnotě druhé nohy, ta už ale není rovna nominálu (forwardové sazby první nohy jsou dopočteny z kotovaných swapových sazeb a diskontovány na křivce OIS, která je zpravidla pod swapovou křivkou)

$$\sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{\mathrm{OIS},t} + DF_{\mathrm{OIS},n} = \sum_{t=1}^{n}\left(f_{2,t} + BS_n\right)\delta_{2,t}DF_{2,t} + DF_{2,n}. \tag{6.9}$$

V terminologii Sekce 3 lze implikovanou diskontní sazbu měny 2 vyjádřit jako

$$R_0(C_2,T) + s_M(C_2,T) - s_M(C_1,T)\,.$$

Diskontní faktory $DF_{OIS,t}$ první nohy dopočteme z OIS swapové křivky podle (4.8). Předpokládejme, že máme kotované swapové sazby fix-float s referenční sazbou pohyblivé nohy rovnou $f_{1,t}$, pak podle (4.11)

$$f_{1,n} = \frac{r_n\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{OIS,t} - \sum_{t=1}^{n-1}f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{OIS,t}}{\delta_{1,n}DF_{OIS,n}},$$

kde r_n je kotovaná swapová sazba pro splatnost n. Dále předpokládejme swapový trh i pro druhou nohu

$$r_{2,n}\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t} = \sum_{t=1}^{n}f_{2,t}\delta_{2,t}DF_{2,t}.$$

Dosazením do (6.9) dostáváme

$$\sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{\mathrm{OIS},t} + DF_{\mathrm{OIS},n} = \left(r_{2,n} + BS_n\right)\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t} + DF_{2,n},$$

z čeho odvodíme diskontní faktory $DF_{2,t}$.

Pro první období máme

$$DF_{2,1} = \frac{\left(1 + r_{1,1}\delta_{1,1}\right)DF_{\mathrm{OIS},1}}{1 + \left(r_{2,1} + BS_1\right)\delta_{2,1}},$$

kde $r_{1,1}$ je spotová (IBOR) sazba pro první období, $DF_{\mathrm{OIS},1}$ je OIS diskontní faktor pro první období, $\delta_{1,1}$ část roku podle konvence první nohy pro první úrokové období.

Pro každý další diskontní faktor platí

$$DF_{2,n} = \frac{\sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{\text{OIS,t}} + DF_{\text{OIS,n}} - \left(r_{2,n} + BS_n\right)\sum_{t=1}^{n-1}\delta_{2,t}DF_{2,t}}{1+\left(r_{2,n} + BS_n\right)\delta_{2,n}}. \tag{6.10}$$

Za povšimnutí stojí, že součet diskontovaných peněžních toků ani jedné nohy v (6.9) se nemusí sčítat na tzv. *par* (100 %).

6.2 Měnový swap kolateralizovaný v měně druhé nohy

Předpokládejme kolateralizaci v měně druhé nohy swapu

$$\sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{1,t} + DF_{1,n} = \sum_{t=1}^{n}\left(f_{2,t} + BS_n\right)\delta_{2,t}DF_{OIS_2,t} + DF_{OIS_2,n}. \tag{6.11}$$

Dále předpokládáme OIS swapový trh pro druhou nohu a swapový trh s referenčními sazbami $f_{2,t}$, pak dopočteme diskontní faktory $DF_{OIS,t}$ z (4.8) a forwardové sazby $f_{2,t}$ z (4.11). Potřebujeme také swapový trh pro $f_{1,t}$

$$r_{1,n}\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{1,t} = \sum_{t=1}^{n} f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{1,t}.$$

Dosazením do (6.11) máme

$$r_{1,n}\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{1,t} + DF_{1,n} = \sum_{t=1}^{n}\left(f_{2,t} + BS_n\right)\delta_{2,t}DF_{OIS_2,t} + DF_{OIS_2,n},$$

z čeho vyjádříme diskontní faktory $DF_{1,n}$

$$DF_{1,n} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(f_{2,t} + BS_n\right)\delta_{2,t}DF_{OIS_2,t} + DF_{OIS_2,n} - r_{1,n}\sum_{t=1}^{n-1}\delta_{1,t}DF_{1,t}}{1+\delta_{1,n}r_{1,n}}. \tag{6.12}$$

7. CZK OIS diskontní křivka

V této části článku navrhneme možný způsob odhadu CZK OIS křivky, tedy v případě, kdy neexistuje likvidní trh OIS kotací. Dále s pomocí teoretických výsledků odvozených v příloze rozložíme spread měnového swapu EUR/CZK na měnový OIS spread a spread vyjadřující meziměnové kreditní a likviditní riziko.

7.1 CZK úrokový swap

V případě CZK úrokového swapu kolateralizovaného CZK hotovostí máme podle (4.12)

$$\sum_{t=1}^{n} f_{\text{Pribor},t}\delta_{1,t}DF_{CZK\ OIS,t} = r_{\text{Pribor},n}\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{CZK\ OIS,t},$$

kde $DF_{CZK\ OIS,t}$ jsou diskontní faktory, které přináleží $r_{OIS,t}$ korunovým OIS swapovým sazbám. Kotace CZK OIS swapů jsou dostupné do jednoho roku. Pro vyšší splatnosti je nutná jistá forma aproximace CZK OIS křivky s pomocí dostupných tržních dat.

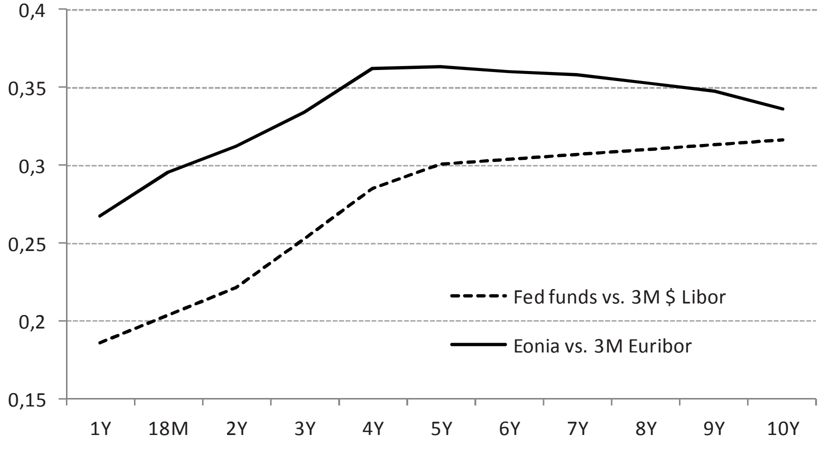
Odhad CZK OIS křivky

Jedním z možných způsobů je definovat diskontní křivku pomocí spreadů k referenční sazbě a postupovat podle (4.16). Spread s_t definujeme posunutím ročních swapových sazeb $r_{\text{Pribor},\,t}$ (fix vs. Pribor 3M) o konstantu $r_{\text{Pribor},1Y} - r_{OIS,1Y}$

$$s_1 = r_{\text{Pribor},1Y} - r_{OIS,1Y}, \tag{7.1}$$

pro $t > 1$ rok. K 13. 9. 2013 je $r_{\text{Pribor},1Y} - r_{OIS,1Y} = 0.37\%$ (MID). Předpokládáme tedy, že pro splatnosti delší než 1 rok mají swapové sazby fix vs. Pribor 3M a OIS swapové sazby konstantní spread ve výši $r_{\text{Pribor},1Y} - r_{OIS,1Y}$. Tento předpoklad můžeme ověřit empiricky na měnách s likvidním OIS trhem. Např. pro EUR i USD je v následujícím grafu zobrazena časová struktura bazických swapových přirážek Fed Funds vs. 3M USD Libor resp. Eonia vs. 3M Euribor

Obrázek 6
Časová struktura swapových spreadů Fed Funds vs. 3M USD Libor a Eonia vs. 3M Euribor k 13. 9. 2013



Zdroj: Bloomberg

Z grafu je patrné, že největší odchylky těchto spreadů existují do čtyř let, pak jsou skoro konstantní. Na kratším konci je také největší likvidita a spread na kratším konci zobrazuje tržní očekávání úrokových sazeb centrálních bank. Swapové sazby zahrnují kromě očekávání základních sazeb také očekávání kreditních a likviditních rizik sazeb IBOR. Tato očekávání jsou rovněž nejvíce obsažena na kratším konci, zatímco na delším jde spíše o odhad součtu dlouhodobé úrovně základních sazeb a průměru kreditních a likviditních rizik obsažených v sazbách IBOR.

7.2 Aproximace diskontních sazeb měnového swapu

Swapové sazby, které určují diskontní faktor druhé nohy měnového swapu a jsou implikované z kotací bazických přirážek, můžeme podle výsledků sekce A přílohy aproximovat jako

$$\begin{aligned} BS_{FX} &\approx \left(r_{1,IBOR} - r_{1,OIS}\right) - \left(r_{2,IBOR} - r_{2,FX}\right) \\ r_{2,FX} &\approx BS_{FX} + r_{2,IBOR} - \left(r_{1,IBOR} - r_{1,OIS}\right) \\ &\approx r_{2,OIS} + \left(BS_{FX} - BS_{OIS-OIS}\right), \end{aligned} \tag{7.2}$$

kde $r_{2,FX} = r_{2d}$ a

$$r_{2,d} \sum_{t=1}^{n} \delta_{2,t} DF_{2,t} + DF_{2,n} = 1, \quad r_{2,d} = \frac{1 - DF_{2,n}}{\sum_{t=1}^{n} \delta_{2,t} DF_{2,t}}.$$

Podobně v případě OIS měnových swapů

$$\begin{aligned} BS_{FX,OIS} &\approx -\left(r_{2,OIS} - r_{2,FX}\right) \\ &\approx BS_{FX} + \left(r_{2,IBOR} - r_{2,OIS}\right) - \left(r_{1,IBOR} - r_{1,OIS}\right) \\ &\approx BS_{FX} - BS_{OIS-OIS}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

7.3 CZK diskontní křivka implikovaná z EUR/CZK měnového swapu

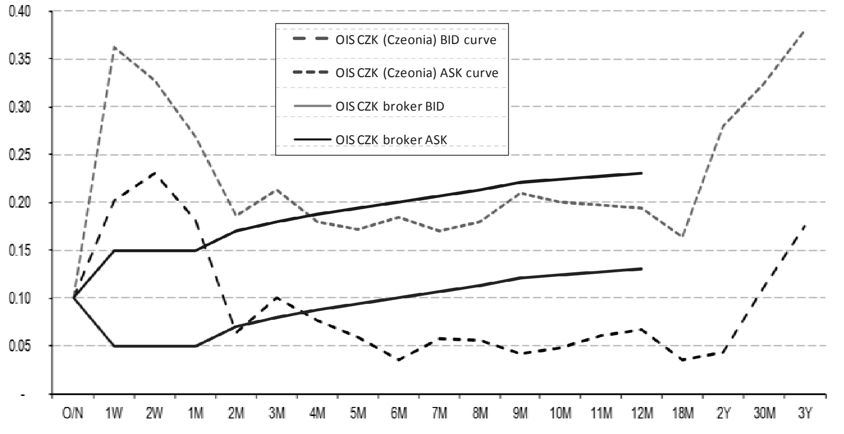
V případě, kdy OIS bazický spread $BS_{FX,\ OIS}$ v EUR/CZK měnovém swapu je zanedbatelný (tj. bazický spread mezi EUR a CZK je vysvětlen pouze kreditním a likviditním rizikem jedné měny vůči druhé měně), CZK OIS diskontní křivku můžeme aproximovat podle (7.2) a platí, že $r_{2,FX} \approx r_{2,OIS}$. Toto tvrzení můžeme empiricky ověřit do jednoho roku porovnáním kotovaných CZK OIS sazeb se syntetickými sazbami z EUR/CZK FX swapů, kde vstupem do výpočtu jsou swapové body a EUR OIS swapová křivka (sazby EONIA vs. fix)

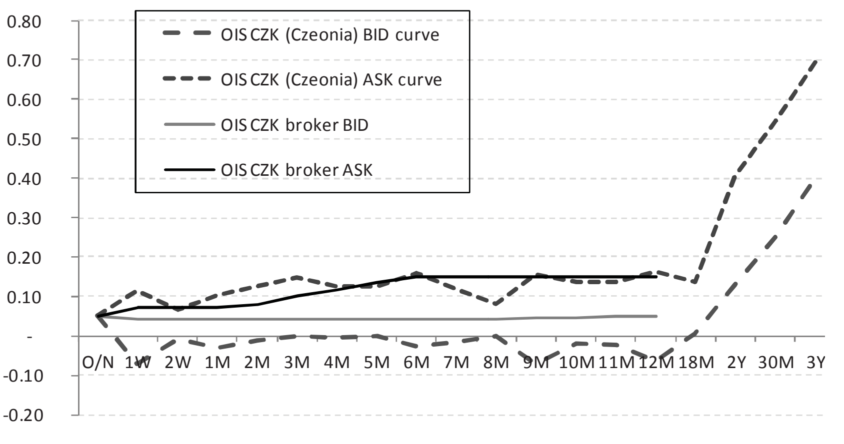
$$S + sp = S \frac{1 + r_{CZK\ OIS,t} \dfrac{D_t}{360}}{1 + r_{t,\ EONIA,t} \dfrac{D_t}{360}},$$

$$r_{CZK\ OIS,t} = \left[\frac{S + sp}{S}\left(1 + r_{EONIA,t} \frac{D_t}{360}\right) - 1\right] \frac{360}{D_t}, \tag{7.4}$$

kde S je spotový kurz EUR/CZK, sp jsou kotované swapové body, D_t je příslušný počet dní kontraktu, $r_{EONIA,t}$ je EUR OIS swapová sazba pro splatnost t a $r_{CZK\ OIS,t}$ je syntetická CZK OIS sazba.

Obrázek 7
Porovnání syntetické CZK OIS křivky do 1 roku přes fx swapy s OIS CZK kotacemi k 14. 11. 2012 a 13. 9. 2013





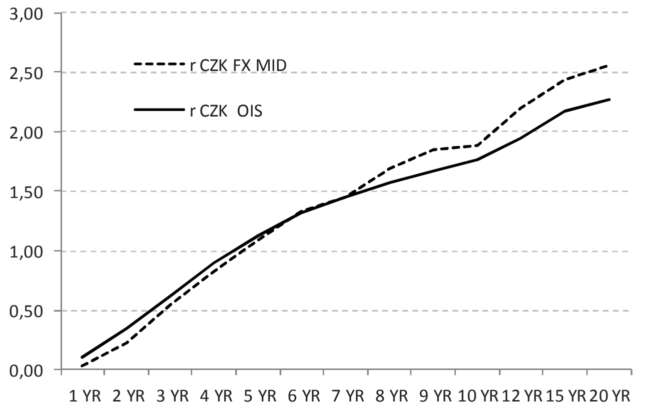
Zdroj dat: Bloomberg, vlastní výpočty

Vidíme, že syntetické sazby z FX swapu neodpovídají kotovaným CZK OIS sazbám, např. 14. 11. 2012 jsou na krátkém konci (do 1 měsíce) znatelně na vyšších úrovních. Možným vysvětlením je zvýšená poptávka po krátkodobé korunové likviditě přes FX swapy, a tedy $BS_{FX,\ OIS} > 0$. Pro delší splatnosti platí opačná situace a spread je záporný (větší poptávka po eurech). 13. 9. 2013 nastává odlišná situace, která naznačuje přebytek korunové likvidity.

Jestliže použijeme (7.1) pro odhad CZK OIS sazeb, potom můžeme pomocí (7.2) aproximovat $r_{CZK\ FX,t}$ swapovou sazbu implikovanou z EUR/CZK bazických swapových spreadů (Euribor 3M vs. Pribor 3M + spread).

Tabulka 1, Obrázek 8
Dopočtené swapové sazby $r_{CZK\ FX,t}$ a $r_{CZK\ OIS,t}$

splatnost	$r_{CZK\ FX,t}$	$r_{CZK\ OIS,t}$
1 YR	0.03	0.10
2 YR	0.23	0.35
3 YR	0.55	0.62
4 YR	0.83	0.90
5 YR	1.09	1.13
6 YR	1.33	1.32
7 YR	1.45	1.46
8 YR	1.70	1.57
9 YR	1.85	1.67
10 YR	1.88	1.77
12 YR	2.20	1.95
15 YR	2.44	2.17
20 YR	2.56	2.27



Zdroj dat: Bloomberg, vlastní výpočty

Likviditní a kreditní prémie CZK sazeb způsobuje, že na delším konci je $r_{CZK,\ FX} > r_{CZK,\ OIS}$. Při diskontování korunového úrokového swapu, který umožňuje udržovat finanční zajištění v CZK i EUR hotovosti bude subjekt, pro který je swap „*mimo peníze*" motivován posílat eurovou hotovost a diskontovat tak peněžní toky vyššími sazbami $r_{CZK,\ FX}$ (čímž dosáhne nejnižší zápornou tržní hodnotu derivátu).

7.4 Měnový OIS swap EUR/CZK

Pomocí (7.3) aproximujeme křivku bazických spreadů $r_{CZK\ FX,\ OIS}$ měnového swapu EUR/CZK (EONIA vs. CZEONIA + spread).

V tabulce 2 jsme rozložili EUR/CZK bazický spread na EUR/CZK OIS bazický spread $BS_{CZK\ FX,\ OIS}$ a spread vyjadřující rozdíl kreditního a likviditního rizika mezi měnami CZK a EUR $BS_{CZK\ FX,\ OIS\text{–}OIS}$, které je výrazně vyšší u sazeb Pribor než Euribor. Přirážka $BS_{CZK\ FX,\ OIS}$ vyjadřuje nabídku a poptávku EUR vůči CZK a ukazuje na vyšší poptávku po eurech přes swapový trh až do splatnosti 10 let a po koruně nad 10 let (v případě, že si zahraniční banky nemohou půjčit CZK na nezajištěném mezibankovním trhu, použijí swapový trh).

Tabulka 2

Dopočtené bazické swapové spready $r_{CZK\ FX,\ OIS}$, $BS_{EUR/CZK\ OIS–OIS}$ a kotovaný $BS_{EUR/CZK\ FX}$

splatnost	$r_{CZK\ FX,\ OIS}$	$BS_{EUR/CZK\ OIS–OIS}$	$BS_{EUR/CZK\ FX}$
1 YR	-6.85	21.15	-28.00
2 YR	-13.95	16.05	-30.00
3 YR	-8.60	14.40	-23.00
4 YR	-8.65	12.35	-21.00
5 YR	-6.50	12.50	-19.00
6 YR	-0.55	12.45	-13.00
7 YR	-2.75	12.25	-15.00
8 YR	10.65	12.65	-2.00
9 YR	15.75	12.75	3.00
10 YR	9.30	13.30	-4.00
12 YR	22.90	13.90	9.00
15 YR	24.60	15.60	9.00
20 YR	26.75	17.75	9.00

Zdroj dat: Bloomberg, vlastní výpočty

Závěr

Předložená studie se zabývá novým jevem, který nelze pominout v období po finanční krizi, a to existencí nezanedbatelných kreditních a likviditních přirážek promítajících se do finančních derivátů i mezi nejdůvěryhodnějšími subjekty finančního trhu. Tyto přirážky se liší podle typu derivátu, způsobu kolateralizace, splatnosti a měny a vedou k potřebě opuštění konceptu jednotné bezrizikové křivky pro každou měnu používané k oceňování finančních kontraktů, jako jsou úrokové, měnové, bazické swapy, či další deriváty. Článek se zabývá analýzou nové struktury implikovaných diskontních křivek, které jsou konzistentní s tržními kotacemi swapových spreadů. V případě, kdy je obchod kolateralizován, předpokládáme diskontování na bázi OIS. Měna kolaterálu má vliv na diskontní sazbu a na reálnou hodnotu derivátu. Následující tabulka obsahuje strukturu analyzovaných diskontních křivek v závislosti na měně kolaterálu a typu swapového obchodu.

Tabulka 3

Výnosové křivky používané k diskontování budoucích peněžních toků kolateralizovaných derivátů

	IRS CZK	**EUR/CZK BS**		**USD/CZK BS**		**CZK3M/CZK6M BS**	
kolaterál		EUR noha	CZK noha	USD noha	CZK noha	3M noha	6M noha
CZK	CZK OIS	EUR FX CZK	CZK OIS	CZK FX USD	CZK OIS	CZK OIS	CZK OIS
EUR	CZK FX EUR	EUR OIS	CZK FX EUR	USD FX EUR	CZK FX EUR	CZK FX EUR	CZK FX EUR
USD	CZK FX USD	EUR FX USD	CZK FX USD	USD OIS	CZK FX USD	CZK FX USD	CZK FX USD

Pozn.: Jejich volba závisí na typu derivátu a měně kolaterálu, např. CZK FX EUR je diskontní křivka odvozena z kolateralizovaného měnového swapu EUR/CZK, kde EUR nohu diskontujeme EUR OIS křivkou.

Dále jsme ukázali, že swapové spready mají vliv na diskontní sazbu a budoucí odhady referenčních sazeb a tedy i na reálnou hodnotu derivátu. Diskontní křivku druhé nohy měnového swapu implikovanou z diskontní křivky první nohy můžeme aproximovat posunutím swapové křivky fix vs. IBOR první nohy. Tuto křivku ale nelze použít k odhadu OIS sazeb druhé nohy (obsahuje navíc kreditní a likviditní spread měnového swapu). Bazický spread měnového swapu jsme rozdělili na OIS bazický spread a spread, který vyjadřuje kreditní a likviditní riziko jedné měny vůči druhé měně. V Příloze také zmiňujeme případ, kdy neexistují přímé kotace jedné měny vůči druhé a kdy je nutné použít přímé kotace vůči společné měně. V poslední kapitole jsme ukázali možný způsob odvození CZK OIS křivky a rozložili jsme spread měnové swapu EUR/CZK na jednotlivé složky vyjadřující relativní poptávku a rozdíl v kreditním a likviditním riziku CZK vůči EUR. Na trzích, kde neexistují OIS kotace pro všechny splatnosti, což je případ CZK, musíme k ocenění kolateralizovaných derivátů přistoupit subjektivně, zároveň však konzistentně s požadavkem neexistence arbitráže na finančních trzích. V budoucnu lze očekávat zvyšující se aktivitu na méně likvidních OIS swapových trzích včetně CZK vedoucí k menším spreadům a ke kotacím i pro delší splatnosti.

PŘÍLOHA – Aproximace diskontních křivek měnových swapů

V této příloze se zabýváme odvozením diskontních křivek implikovaných kotacemi měnových swapů a zvolenou diskontní křivkou v základní měně.

Nechť $r_{j,f}$ je kotovaná swapová sazba j-té nohy (j=1,2) pro splatnost n, z níž jsou odvozeny forwardové IBOR sazby, a nechť $r_{j,d}$ swapová sazba j-té nohy příslušející diskontním faktorům $DF_{j,t}$ (např. běžným dluhopisovým diskontním faktorům nebo faktorům OIS). Pokud je kalendářní konvence a frekvence výplaty úroků stejná, pak podle (4.1) a (4.5) můžeme napsat

$$\sum_{t=1}^{n} f_{j,t}\delta_{j,t}DF_{j,t} = r_{j,f}\sum_{t=1}^{n}\delta_{j,t}DF_{j,t},\quad r_{j,f} = \frac{\sum_{t=1}^{n} f_{j,t}\delta_{j,t}DF_{j,t}}{\sum_{t=1}^{n}\delta_{j,t}DF_{j,t}}, \tag{P.1}$$

$$r_{j,d}\sum_{t=1}^{n}\delta_{j,t}DF_{j,t} + DF_{j,n} = 1,\quad r_{j,d} = \frac{1-DF_{j,n}}{\sum_{t=1}^{n}\delta_{j,t}DF_{j,t}}. \tag{P.2}$$

Dosazením (P.1) a (P.2) do (6.2) dostáváme

$$\left(r_{1,f} - r_{1,d}\right)\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{1,t} + 1 = \left(r_{2,f} - r_{2,d} + BS_n\right)\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t} + 1, \tag{P.3}$$

z čeho vyjádříme spread BS_n

$$\left(r_{1,f}-r_{1,d}\right)\frac{\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{2,t}}{\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t}}=\left(r_{2,f}-r_{2,d}+BS_n\right),$$

$$BS_n=\left(r_{1,f}-r_{1,d}\right)\frac{\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{1,t}}{\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t}}-\left(r_{2,f}-r_{2,d}\right). \tag{P.4}$$

Tento přesný výsledek přibližně odpovídá našemu očekávání dle (6.1). V dalším textu použijeme (P.4) pro odvození aproximačních vztahů pro vybrané typy bazických swapů podle Wu (2011).

A. Meziměnové kreditní a likviditní riziko

Porovnáním současných hodnot dvou OIS diskontovaných pohyblivých noh (tedy za předpokladu teoretické bezrizikovosti obou stran obchodu) v různých měnách můžeme vysvětlit tzv. meziměnové kreditní a likviditní riziko $BS_{OIS-OIS}$, respektive kreditní/likviditní riziko jedné měny vůči kreditnímu/likviditnímu riziku druhé měny)

$$\sum_{t=1}^{n}f_{1,t}\delta_{1,t}DF_{OIS_1,t}+DF_{OIS_1,n}=\sum_{t=1}^{n}\left(f_{2,t}+BS_{OIS-OIS}\right)\delta_{2,t}DF_{OIS_2,t}+DF_{OIS_2,n}.$$

Použitím (P.4), (P.1) a (P.2) dostáváme

$$BS_{OIS-OIS}=\left(r_{1,IBOR}-r_{1,OIS}\right)\frac{\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{OIS_1,t}}{\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{OIS_2,t}}-\left(r_{2,IBOR}-r_{2,OIS}\right),$$

kde

$$r_{j,IBOR}=\frac{\sum_{t=1}^{n}f_{j,t}\delta_{j,t}DF_{OIS_j,t}}{\sum_{t=1}^{n}\delta_{j,t}DF_{OIS_j,t}},\quad r_{j,OIS}=\frac{1-DF_{OIS_j,n}}{\sum_{t=1}^{n}\delta_{j,t}DF_{OIS_j,t}}.$$

Zaokrouhlením zlomku $\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{OIS_1,t}\Big/\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{OIS_2,t}$ na 1 dostaneme aproximační vztah pro spread $BS_{OIS-OIS}$

$$BS_{OIS-OIS}\approx\left(r_{1,IBOR}-r_{1,OIS}\right)-\left(r_{2,IBOR}-r_{2,OIS}\right). \tag{P.5}$$

Meziměnové kreditní/likviditní riziko lze aproximovat jako rozdíl tzv. IBOR-OIS spreadů obou noh. V intuitivní terminologii Sekce 2 výsledek odpovídá výrazu:

$$BS_{OIS-OIS}\approx s_{\mathrm{IBOR}}(C_1,3M)-s_{\mathrm{IBOR}}(C_2,3M).$$

Podobně, viz také (6.1), můžeme aproximovat swapové sazby používané pro diskontování $r_{2,d} = r_{2,FX}$ implikované z kotací bazických spreadů BS_{FX} (na bázi IBOR) a z $r_{1,OIS}$

$$\begin{aligned} BS_{FX} &\approx \left(r_{1,IBOR} - r_{1,OIS}\right) - \left(r_{2,IBOR} - r_{2,FX}\right) \\ r_{2,FX} &\approx BS_{FX} + r_{2,IBOR} - \left(r_{1,IBOR} - r_{1,OIS}\right) \\ &\approx r_{2,OIS} + \left(BS_{FX} - BS_{OIS-OIS}\right). \end{aligned} \tag{P.6}$$

Swapové sazby $r_{2,FX}$ implikované z bazických spreadů lze tedy aproximovat jako IBOR sazby posunuté o bazický spread a snížené o IBOR-OIS spread první nohy, neboli jako OIS sazby posunuté o faktor ($BS_{FX} - BS_{OIS–OIS}$). Za povšimnutí stojí, že $r_{2,FX} \approx r_{2,OIS}$ jen v případě, že ($BS_{FX} - BS_{OIS–OIS}$) je blízko nuly, tj. nelze odhadnout OIS swapové sazby druhé nohy pouze z $r_{2,FX}$.

B. Měnový OIS swap typu float-float

Měnový OIS float-float swap je spojen s dočasným vypůjčením likvidity v jedné měně výměnou za půjčení druhé měny. V průběhu životnosti obchodu platí jedna strana úroky odvozené od referenčních jednodenních sazeb (ONIA) + spread v pravidelné frekvenci (např. 3M) a dostává úroky odvozené od referenčních jednodenních sazeb v druhé měně[6].

Pro měny, pro které existuje trh OIS měnových swapů, můžeme odhadnout swapové sazby používané pro diskontování podobně jako v (P.6)

$$\sum_{t=1}^{n} f_{OIS_1,t}\delta_{1,t} DF_{OIS_1,t} + DF_{OIS_1,n} = \sum_{t=1}^{n}\left(f_{OIS_2,t} + BS_{FX,OIS}\right)\delta_{2,t} DF_{FX,t} + DF_{FX,n}, \tag{P.7}$$

kde forwardové sazby $f_{OIS_j,t} = \dfrac{1}{\delta_{j,t}}\left(\dfrac{DF_{OIS_j,t-1}}{DF_{OIS_j,t}} - 1\right)$ jsou dopočteny z OIS diskontních faktorů a tedy levá strana je rovna 1. S využitím (P.5) a (P.6) dostáváme aproximaci

$$\begin{aligned} BS_{FX,OIS} &\approx -\left(r_{2,OIS} - r_{2,FX}\right) \\ &\approx BS_{FX} + \left(r_{2,IBOR} - r_{2,OIS}\right) - \left(r_{1,IBOR} - r_{1,OIS}\right) \\ &\approx BS_{FX} - BS_{OIS-OIS}. \end{aligned} \tag{P.8}$$

Tento výsledek odpovídá naší intuitivní interpretaci, podle níž by mělo platit

$$BS_{FX,OIS} \approx s_M(C_2, T) - s_M(C_1, T).$$

OIS bazický spread představuje rozdíl mezi diskontní sazbou implikovanou z diskontních faktorů druhé nohy a tržní OIS sazbou druhé nohy a lze ho aproximovat jako IBOR

6 Např. V případě páru EUR/USD jde o tzv. basis swap EUR EONIA + spread vs. Fed funds effective rate.

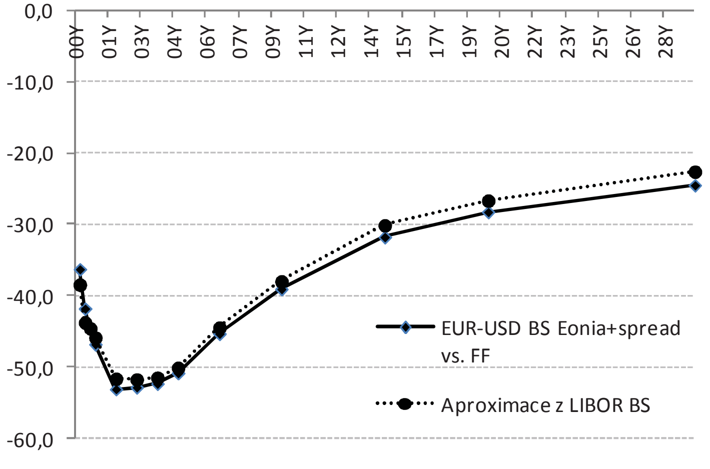
bazický spread snížený o bazický spread vyjadřující meziměnové kreditní a likviditní riziko. Zde jsme předpokládali, že diskontní faktory $DF_{FX,n}$ v (P.7) implikované z první nohy CCS OIS swapu jsou stejné jako v případě měnového swapu v (6.9). To můžeme potvrdit empiricky: v následující tabulce a grafu je zobrazena EUR/USD OIS bazická swapová křivka (Eonia + spread vs. FF) a její aproximace z EUR/USD LIBOR bazické swapové křivky podle (P.8) ke dni 17. 8. 2012.

Tabulka P1, Obrázek P1

Porovnání kotací OIS BS EUR/USD a jejich aproximací k 17. 8. 2012

Splatnost	EUR/USD BS FF/EONIA	Aproxi-mace	rozdíl v bps
3MO	-36.30	-38.40	2.2
6MO	-41.80	-43.70	2.0
9MO	-44.50	-44.50	0.0
1YR	-46.80	-45.80	-1.0
2YR	-53.00	-51.55	-1.5
3YR	-52.80	-51.65	-1.1
4YR	-52.30	-51.40	-0.9
5YR	-50.80	-50.02	-0.7
7YR	-45.30	-44.40	-0.9
10YR	-39.00	-37.95	-1.0
15YR	-31.80	-30.10	-1.7
20YR	-28.30	-26.65	-1.6
30YR	-24.50	-22.60	-1.9

Zdroj: Bloomberg



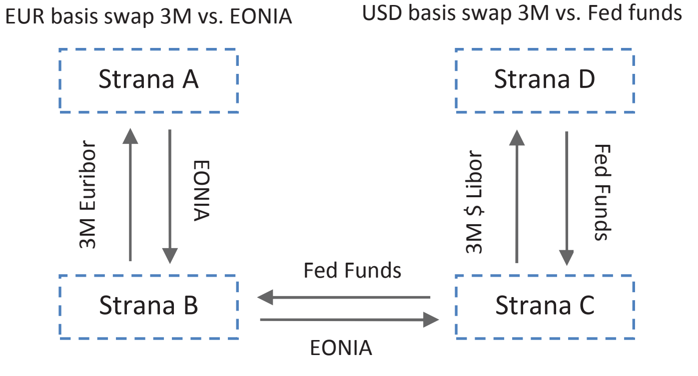
Swapové sazby používané pro diskontování $r_{2,FX}$ tak můžou být odhadnuty z obou bazických swapových křivek (LIBOR i OIS)

$$r_{2,FX} \approx BS_{FX} + r_{2,IBOR} - \left(r_{1,IBOR} - r_{1,OIS}\right) \approx r_{2,OIS} + BS_{FX,OIS}. \tag{P.9}$$

Wu (2011) empiricky ukázal, že pro likvidní instrumenty platí vztah (P.9) s přesností v řádu 1-3 bps. Pro diskontování kolateralizovaných měnových swapů tedy můžeme použít jak diskontní křivku odvozenou z IBOR bazických spreadů tak diskontní křivku odvozenou z OIS bazických spreadů.

Pro názornost si ještě ukažme vztah (P.8) na příkladu EUR/USD měnového swapu rozloženého na tři základní swapy, měnový EUR/USD OIS swap, Eonia vs. 3M Euribor swap a Fed funds vs. 3M USD Libor swap.

Obrázek P2
Měnový EUR/USD OIS swap



Eonia vs. 3M Euribor swap určuje složku $\left(r_{Euribor} - r_{Eonia}\right)$ a Fed funds vs. 3M USD Libor swap určuje $\left(r_{USD\ Libor} - r_{USD\ OIS}\right)$. Bazický spread BS_{FX} měnového swapu se tak odvíjí od časové struktury kreditních a likviditních přirážek domácí a zahraniční měny.

C. Měna kolaterálu a nepřímé kotace

Obecně, v případě, že měna derivátu je jiná než měna kolaterálu nebo v případě, kdy dodatek CSA umožňuje posílat finanční kolaterál v různých měnách (např. USD úrokový swap kolateralizován EUR hotovostí), dlužník má snahu optimalizovat cash flow a doručit tak levnější kolaterál. V takovém případě je vhodnější diskontovat finanční toky použitím bazických swapových křivek mezi měnou derivátu a měnou kolaterálu, tzv. „měnově implikovanou" OIS křivkou, která odpovídá OIS křivce měny kolaterálu upravené o OIS bazický spread.

Pro derivát v měně 1, který je kolateralizován hotovostí v měně 2 diskontujeme peněžní toky měny 1 „novou" OIS křivkou implikovanou z měnového swapu měny 1 vs. měna 2 podle vztahu (P.3)

$$\left(r_{1,IBOR} - r_{1,d}\right)\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{1,t} = \left(r_{2,IBOR} - r_{2,OIS} + BS\right)\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t},$$
$$r_{1,d} \approx r_{1,IBOR} - BS - \left(r_{2,IBOR} - r_{2,OIS}\right). \tag{P.10}$$

Vidíme, že jde o aproximativní vyjádření (6.12).

Pro měnové páry, pro které nejsou dostupné přímé kotace, použijeme nepřímé kotace vůči společné měně (např. v případě měnového USD/CZK swapu použijeme kotované spready pro EUR/USD a EUR/CZK swapy). Vycházíme přitom ze vztahu (P.3) a první nohu upravíme o kotovaný spread

$$\left(r_{1,IBOR} - r_{1,d} + BS_1\right)\sum_{t=1}^{n}\delta_{1,t}DF_{1,t} = \left(r_{2,IBOR} - r_{2,OIS} + BS_2\right)\sum_{t=1}^{n}\delta_{2,t}DF_{2,t},$$
$$r_{1,d} \approx r_{1,IBOR} + BS_1 - BS_2 - \left(r_{2,IBOR} - r_{2,OIS}\right). \tag{P.11}$$

V (P.5) a dále jsme přijali zjednodušující předpoklad o rovnosti anuit $\sum_{t=1}^{n}\delta_{j,t}DF_{OIS_j,t}$, tj. že swapové křivky jsou blízko sebe a jejich diskontní faktory se neliší. To však pro některé měny a zejména delší splatnosti neplatí. Wu (2012) navrhuje jednoduchou aproximaci s předpokladem ploché (flat) křivky: pro danou swapovou sazbu $r_{j,n}$ zkonstruujeme plochou křivku, diskontní faktory které tvoří geometrickou řadu

$$A_j = \sum_{t=1}^{n}\delta_{j,t}DF_{j,t} \approx \sum_{t=1}^{n}\overline{\delta}e^{-t\overline{\delta}r_k},$$

kde $\overline{\delta}$ je část roku před započtením obchodních dnů.

Reference

AMETRANO, F.; BIANCHETTI M. 2009. Bootstrapping the Illiquidity: Multiple Yield Curves Construction For Market Coherent Forward Rates Estimation. In MERCURIO, F. (ed.) *Modeling Interest Rates: Latest Advances for Derivatives Pricing*. Risk Books, 2009. ISBN: 1906348138

ANDO, M. 2012. Recent Developments in U. S. Dollar Funding Costs through FX Swaps. Bank of Japan Review Paper No. 2012-J-3. 2012.

BIANCHETTI, M. 2008. Two Curves, One Price: Pricing & Hedging Interest Rate Derivatives Decoupling Forwarding and Discounting Yield Curves. [Working paper]. 2008. http://ssrn.com/abstract=1334356.

BIANCHETTI, M.; CARLICCHI, M. 2012. Interest Rates After The Credit Crunch: Multiple-Curve Vanilla Derivatives and SABR. [Working paper]. 2012. http://ssrn.com/abstract=1783070.

BOENKOST, W.; SCHMIDT, W. M. 2005. Cross Currency Swap Valuation, [Working Paper no. 2], HfB – Business School of Finance and Management, 2005.

COLLIN-DUFRESNE, P.; SOLNIK, B. 2001. On the Term Structure of Default Premia in the Swap and Libor Market. *The Journal of Finance.* 2001, Vol. 56, No. 3, pp 1095–1115.

FUJII, M.; SHIMADA, Y.; TAKAHASHI, A. 2010a. A Note on Construction of Multiple Swap Curves with and without Collateral. [CARF Working Paper Series No. CARF-F-154]. 2010. http://ssrn.com/abstract=1440633.

HENRARD, M. 2009. The Irony in the Derivatives Discounting Part II: The Crisis. [Working Paper]. 2009.

HULL, J.; WHITE, A. 2012a. CVA, DVA, FVA and the Black-Scholes-Merton Arguments. [Working Paper]. University of Toronto. 2012.

HULL, J.; WHITE, A. 2012b. LIBOR vs. OIS: The Derivatives Discounting Dilemma. [Working Paper]. University of Toronto. 2012.

CHANG, Y.; SCHLOGL, E. 2012. Carry Trade and Liquidity. Risk Evidence from Forward and Cross-Currency Swap Markets. [Working Paper]. 2012. Dostupné na http://ssrn.com/abstract=2137444.

CHIBANE, M.; SHELDON, G.; SELVARAJ, J. 2009. Building Curves on a Good Basis. [Working paper]. 2009. http://ssrn.com/abstract=1394267.

CHIBANE, M.; HUANG, Y.; SELVARAJ, J. 2012. Discounting Consistently with Collateral Posting, [Working Paper]. 2012.

ISDA. 2012. ISDA Margin Survey 2012. International Swaps and Derivatives Association. Dostupné na http://www2.isda.org/functional-areas/research/surveys/margin-surveys/.

IVASHINA, V. a kol. 2012. Dollar Funding and the Lending Behavior of Global Banks. [Research paper no. 2012-74]. Finance and Economics Discussion Series (FEDS), Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs Federal Reserve Board, Washington, D.C. 2012.

JOHANNES, M.; SUNDARESAN, S. 2003. Pricing Collateralized Swaps. [Columbia Business School Working Paper]. 2003.

JOHANNES, M.; SUNDARESAN, S. 2007. The Impact of Collateralization on Swap Rates, *Journal of Finance*, 2007, Vol. 62, No. 1, pp 383–410.

KIJIMA, M.; TANAKA, K.; WONG, T. 2009. A multi-quality model of interest rates. *Quantitative Finance*, 2009, pp. 133–145.

MÁLEK, J.; RADOVÁ, J.; ŠTĚRBA, F. 2007. Konstrukce výnosové křivky pomocí vládních dluhopisů v České republice. *Politická ekonomie*. 2007, Vol. 55, No. 6, pp. 792–808.

MERCURIO, F. 2010. Interest Rates and The Credit Crunch: New Formulas and Market Models, [Bloomberg Portfolio Research Paper No. 2010-01-FRONTIERS]. 2010.

MORINI, M. 2009. Solving the Puzzle in the Interest Rate Market. [Working Paper]. 2009.

PITERBARG, V. 2010. Funding beyond discounting. *Risk Magazine*, 2010. pp. 97–102.

PULMAN, C. 2003. Short End of the Curve. [Working paper]. Lehman Brothers Research. 2003.

TUCKMAN, B.; PORFIRIO, P. 2003. Interest Rate Parity, Money Market Basis Swaps and Cross-Currency Basis Swaps. [Working paper]. Lehman Brothers Fixed Income Liquid Markets Research. 2003.

WITZANY, J. 2010. *Credit Risk Management and Modeling*. Praha: Oeconomica, 2010. ISBN: 9788024516820.

WITZANY, J. 2011. *Financial Derivatives and Market Risk Management – Part I.* Praha: Oeconomica, 2011. ISBN 9788024518114.

WU, Z. 2011. OIS versus Cross Currency Basis Implied Discount Curves. [Working paper]. Bloomberg IDOC #2064753. 2011.

WU, Z. 2012. Approximate Multi-Currency CSA Curves. [Working paper]. Bloomberg IDOC #2066988. 2012.

YIELD CURVE CONSTRUCTION AFTER CRISIS

Jaroslav Baran, Jiří Witzany, University of Economics, Prague, nám. W. Churchilla 4, CZ – 130 01 Praha (xbarj901@vse.cz, witzanyj@vse.cz)

Abstract

Market value of derivatives after crisis requires discounting with interest rates that take into account the credit risk of the involved counterparties of the trade. The increase of credit risk is evidenced by the presence of basis swap spreads. Using one curve to both estimating the forward rates and discounting future cash flows is not plausible given the prerequisite of arbitrage free market. The aim of this paper is to derive discount curves which are consistent with market quotes. In the concluding part, we estimate CZK OIS rates, which can be then used to discount derivatives denominated in CZK and collateralized with CZK cash.

Keywords

swap spreads, overnight indexed swap, basis swap, cross-currency swap, discount factor, collateral

JEL Classification

D53, G01