Konzultace

PODMIENKY OPTIMÁLNOSTI KUHNA-TUCKERA V MODELOCH ROVNOVÁHY TRHU SIEŤOVÝCH ODVETVÍ

Eleonora Fendeková, Michal Fendek, Ekonomická univerzita v Bratislavě*

Úvod

V súčasnosti sa v odborných diskusiách na rôznych úrovniach venuje značná pozornosť problematike sieťových odvetví. Je to pochopiteľné, veď sieťové odvetvia zabezpečujú v konečnom dôsledku výrobu a distribúciu energetických zdrojov, ktoré majú pre efektívne fungovanie rozvinutých ekonomík kľúčový význam. Stredobodom záujmu sú obvykle otázky primeraného zisku subjektov sieťových odvetví na jednej strane a otázky úrovne cien ich produkcie determinované odôvodnenými a pre spoločnosť akceptovateľnými nákladmi na strane druhej (Fendek, Fendeková, 2009).

Samozrejme, stav rovnováhy na každom trhu, a teda i na trhu sieťových odvetví je kreovaný na základe konfrontácie medzi úrovňou dopytu a úrovňou ponuky na relevantnom trhu. V príspevku budeme prezentovať nie celkom tradičnú formu analýzy modelov správania sa spotrebiteľa a producentov na trhu sieťových odvetví. Budeme skúmať fenomén dopytu a ponuky na trhu sieťových odvetví, ako aj všeobecné otázky efektívnosti tohto špecifického trhu. Pre stanovenie optimálnych stratégií výrobcov a spotrebiteľov naformulujeme adekvátne úlohy matematického programovania, pre ktoré odvodíme podmienky optimálnosti Kuhna a Tuckera. Následne na základe analýzy podmienok optimálnosti ukážeme ako platnosť podmienok optimálnosti Kuhna a Tuckera pre optimálne riešenia týchto úloh potvrdzuje vecný charakter stratégií racionálne sa správajúcich subjektov trhu sieťových odvetví.

1. Podmienky optimálnosti spotrebiteľov na trhu sieťového odvetvia

Charakteristickou vlastnosťou modelov rovnováhy sieťových odvetví je určitá izolovanosť trhu, na ktorom sú produkty sieťových odvetví pre spotrebiteľa zväčša nesub-

* Článok bol vydaný s podporou Vedeckej grantovej agentúry Ministerstva školstva SR a Slovenskej akadémie vied v rámci projektu „Teória regulácie monopolov na nadnárodných trhoch dominantných subjektov sieťových odvetví v prostredí s vysokým stupňom koncentrácie," 2012–2014.

stituovateľné, takže užitočnosť, ktorú spotrebiteľ pociťuje pri ich používaní môžeme kvantifikovať špecifickým spôsobom. Principiálne ide o takú prezentáciu funkcie užitočnosti, kedy produkt sieťového odvetvia je vnímaný ako tovar so samostatnou a exaktne formulovanou funkciou užitočnosti a ostatné tovary sú vnímané ako spotreba jedného prepočítaného, resp. agregovaného tovaru s normovanou jednotkovou cenou.

Nadbytok spotrebiteľa, resp. výrobcu, ako klasické kategórie mikroekonomickej analýzy sa veľmi efektívne využívajú pri opise správania sa spotrebiteľov a výrobcov na trhu výrobkov a služieb, nakoľko umožňujú kvalifikovane vysvetliť intuitívne tendencie najmä spotrebiteľov pri prijímaní rozhodnutí o kreovaní svojej optimálnej spotrebnej stratégie pri meniacich sa parametroch trhového prostredia, ktorými sú v tomto type analýzy zvyčajne ceny (Carlton, 2005).

V príspevku poukážeme aj na určité zvláštnosti kategórie nadbytok spotrebiteľa v prípade analýzy produktov sieťových odvetví. Toto špecifikum vyplýva z toho, že spotrebiteľ obvykle v krátkom časovom horizonte nie je reálne schopný substituovať produkt sieťového odvetvia, napr. plyn, iným tovarom s primeranými úžitkovými vlastnosťami, preto vníma produkt ako exkluzívny a táto exkluzivita sa dá potom aj formálne vyjadriť pri konštrukcii funkcie užitočnosti a z toho vyplývajúcich ďalších nadväzujúcich analytických úloh. Funkcie užitočnosti sú zväčšia nelineárnymi funkciami spotreby tovarov spotrebiteľského koša, takže pre určenie optimálnej stratégie spotrebiteľa budeme využívať úlohy nelineárneho programovania.

Predpokladajme, že na relevantnom trhu sieťového odvetvia pôsobí m spotrebiteľov S_i pre $i = 1, 2, ..., m$. Tovar, alebo službu sieťového odvetvia, ktoré majú homogénny charakter, povedzme distribúciu elektrickej energie, poskytuje n subjektov, dodávateľov D_j pre $j = 1, 2, \ldots, n$. Budeme teda skúmať trh homogénneho produktu, kde spotreba o objeme danom premennou x_i je spotrebou homogénneho produktu u i-teho spotrebiteľa S_i a spotreba všetkých ostatných tovarov v spotrebnom koši tohto spotrebiteľa je prezentovaná prepočítanou agregovanou premennou x_{0i}. Ak užitočnosť zo spotreby produktu sieťového odvetvia u spotrebiteľa S_i je daná vo všeobecnosti nelineárnou funkciou $u_i(x_i)$, ktorá vyjadruje úroveň užitočnosti v peňažných jednotkách a cena prepočítaného tovaru je normovaná na hodnotu „1“, tak celková užitočnosť spotrebiteľa S_i je vyjadrená v peňažných jednotkách funkciou $v_i(x_i, x_{0i})$ takto

$$v_i\left(x_i, x_{0i}\right) = u_i\left(x_i\right) + x_{0i}$$

pričom $v_i\left(x_i, x_{0i}\right): R^2 \to R, u_i\left(x_i\right): R \to R$ sú reálne funkcie dvoch, resp. jednej premennej.

Pri takto vnímanej funkcii užitočnosti ju potom môžeme pre potreby ďalších analýz interpretovať ako celkovú užitočnosť v peňažných jednotkách, ktorú pociťuje spotrebiteľ pri kúpe x_i jednotiek produktu sieťového odvetvia a súčasnej kúpe x_{0i} jednotiek agregovaných ostatných tovarov spotrebiteľského koša, ktoré sú ocenené normovanou cenou jedna peňažná jednotka. Všimnime si, že v dôsledku toho, že funkcia užitočnosti $v_i(x_i, x_{0i})$ je lineárna vzhľadom na premennú x_{0i} dopytu po agregovanom tovare, tak hraničná miera spotrebiteľskej substitúcie nezávisí od spotreby tohto agregovaného tovaru ani od užitočnosti, ktorá je s jeho spotrebou spojená, nakoľko platí

$$\frac{\partial v_i\left(x_i, x_{0i}\right)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial v_i\left(x_i, x_{0i}\right)}{\partial x_{0i}} dx_{0i} = 0$$

$$-\frac{dx_{0i}}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial\left(u_i\left(x_i\right)+x_{0i}\right)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial\left(u_i\left(x_i\right)+x_{0i}\right)}{\partial x_{0i}}} = \frac{\dfrac{\partial\left(u_i\left(x_i\right)+x_{0i}\right)}{\partial x_i}}{1} = \frac{\partial u_i\left(x_i\right)}{\partial x_i}$$

$$-\frac{dx_{0i}}{dx_i} = u_i'\left(x_i\right) = mu_i\left(x_i\right)$$

kde $u_i'\left(x_i\right) = mu_i\left(x_i\right): R \to R$ je reálna funkcia jednej premennej, a to funkcia hraničnej, resp. marginálnej užitočnosti spotreby produktu sieťového odvetvia i-teho spotrebiteľa. Správanie spotrebiteľa možno potom charakterizovať tak, že spotrebiteľ kompenzuje napr. zníženie spotreby tovaru sieťového odvetvia o jedno percento zvýšením spotreby agregovaného tovaru o počet percentuálnych bodov rovný marginálnej užitočnosti tovaru sieťového odvetvia. Uvedený vzťah zároveň potvrdzuje, že hraničná miera spotrebiteľskej substitúcie tovaru sieťového odvetvia v konečnom dôsledku nezávisí od spotrebiteľských atribútov agregovaného tovaru ale je výlučne funkciou preferencií spotrebiteľa voči tovaru sieťového odvetvia.

Predpokladajme ďalej, že funkcia užitočnosti tovaru sieťového odvetvia $u_i(x_i)$ je pre každého spotrebiteľa S_i hladká, t. j. spojitá a diferencovateľná a jej hodnota je pre nulovú spotrebu komodity tiež nulová a platí $u_i(0) = 0$. Ďalej predpokladajme, že funkcia marginálnej užitočnosti $mu_i(x_i)$ je klesajúca, takže pre druhú deriváciu funkcie užitočnosti $u_i''(x_i)$ platí vzťah

$$u_i''\left(x_i\right) = \frac{dmu_i\left(x_i\right)}{dx_i} = \frac{d^2 u_i\left(x_i\right)}{dx_i^2} < 0$$

pričom pre definičný obor funkcie hraničnej užitočnosti $mu_i(x_i)$ a obor jej funkčných hodnôt platí $D\left(mu_i\left(x_i\right)\right) = \left\langle 0, \infty\right)$, $H\left(mu_i\left(x_i\right)\right) = \left(-\infty, \infty\right)$. Inými slovami, hraničná užitočnosť sledovaného tovaru sieťového odvetvia je v zóne rastu užitočnosti kladná, ale jej hodnoty postupne klesajú, v bode maxima funkcie užitočnosti dosiahne funkcia hraničnej užitočnosti nulovú hodnotu a pri ďalšom raste spotreby je možný pokles hraničnej užitočnosti do oblasti záporných hodnôt.

Užitočnosť $u_i(x_i)$ pri kúpe x_i jednotiek tovaru sieťového odvetvia potom zodpovedá ochote spotrebiteľa kompenzovať spotrebu x_i jednotiek tohto tovaru adekvátnym počtom x_{0i} jednotiek agregovaného tovaru (Fendek, 2008). Jednoducho vyjadrené, spotrebiteľ je ochotný v záujme získania x_i jednotiek tovaru sieťového odvetvia pri zachovaní úrovne užitočnosti vzdať sa až $u_i(x_i)$ jednotiek agregovaného tovaru s normovanou jednotkovou cenou.

Správanie sa i-teho spotrebiteľa S_i pre každé i = 1, 2, ..., m budeme skúmať prostredníctvom optimalizačnej úlohy maximalizácie funkcie celkovej užitočnosti i-teho spotrebiteľa S_i pri ohraničených výdavkoch na spotrebu so spotrebným limitom

w a cenou produktu sieťového odvetvia p. Úloha je pre nezáporné premenné x_i a x_{0i} formulovaná takto:

$$v_i\left(x_i, x_{0i}\right) = u_i\left(x_i\right) + x_{0i} \quad \to \max$$

pri ohraničení

$$px_i + x_{0i} = w_i$$

$$x_i, x_{0i} \geq 0$$

Hore uvedená optimalizačná úloha matematického programovania je úlohou maximalizácie na viazaný extrém (Fendek, Fendeková, 2010). Upravme túto úlohu na štandardný tvar, t. j. na úlohu minimalizácie takto:

$$-v_i\left(x_i, x_{0i}\right) = -u_i\left(x_i\right) - x_{0i} \quad \to \min \tag{1}$$

pri ohraničení

$$px_i + x_{0i} = w_i \tag{2}$$

$$x_i, x_{0i} \geq 0 \tag{3}$$

Pre túto úlohu sformulujme zovšeobecnenú Lagrangeovu funkciu. Poznamenajme len, že zovšeobecnená Lagrangeovu funkciu nezahŕňa podmienky nezápornosti premenných explicitne, ale sú zohľadnené implicitne v podmienkach optimálnosti Kuhna-Tuckera. Zovšeobecnená Lagrangeovu funkciu úlohy matematického programovania (1), ..., (3) je formulovaná takto:

$$\begin{aligned} L_i\left(x_i, x_{0i}, \lambda_i\right) &= -v_i\left(x_i, x_{0i}\right) + \lambda_i\left(px_i + x_{0i} - w_i\right) = \\ &-u_i\left(x_i\right) - x_{0i} + \lambda_i\left(px_i + x_{0i} - w_i\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera (Jarre, 2004) pre Lagrangeovu funkciu (4) i-teho spotrebiteľa S_i sú v tvare

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial L_i\left(x_i, x_{0i}, \lambda_i\right)}{\partial x_i} \geq 0 & \dfrac{\partial L_i\left(x_i, x_{0i}, \lambda_i\right)}{\partial x_{0i}} \geq 0 & \dfrac{\partial L_i\left(x_i, x_{0i}, \lambda_i\right)}{\partial \lambda_i} = 0 \\ x_i \dfrac{\partial L_i\left(x_i, x_{0i}, \lambda_i\right)}{\partial x_i} = 0 & x_{0i} \dfrac{\partial L_i\left(x_i, x_{0i}, \lambda_i\right)}{\partial x_{0i}} = 0 & \\ x_i \geq 0 & x_{0i} \geq 0 & \end{array} \tag{5}$$

Po dosadení analytického tvaru Lagrangeovej funkcie (4) preformulujeme podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera v tvare (5) takto

$$\frac{\partial\left(-u_i\left(x_i\right)-x_{0i}\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial \lambda_i p x_i}{\partial x_i}\geq 0 \qquad \frac{\partial\left(-u_i\left(x_i\right)-x_{0i}\right)}{\partial x_{0i}}+\frac{\partial \lambda_i x_{0i}}{\partial x_{0i}}\geq 0 \qquad \frac{\partial \lambda_i\left(p x_i+x_{0i}-w_i\right)_i}{\partial \lambda_i}=0$$

$$x_i\left(\frac{\partial\left(-u_i\left(x_i\right)-x_{0i}\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial \lambda_i p x_i}{\partial x_i}\right)=0 \qquad x_{0i}\left(\frac{\partial\left(-u_i\left(x_i\right)-x_{0i}\right)}{\partial x_{0i}}+\frac{\partial \lambda_i x_{0i}}{\partial x_{0i}}\right)=0$$

$$x_i \geq 0 \qquad x_{0i}\geq 0$$

a po ďalšej úprave získame takéto vyjadrenie podmienok optimálnosti Kuhna-Tuckera

$$\begin{array}{llllll} -mu_i\left(x_i\right)+\lambda_i p\geq 0 & (a) & -1+\lambda_i\geq 0 & (d) & px_i+x_{0i}=w_i & (g)\\ x_i\left(-mu_i\left(x_i\right)+\lambda_i p\right)=0 & (b) & x_{0i}\left(-1+\lambda_i\right)=0 & (e) & & \\ x_i\geq 0 & (c) & x_{0i}\geq 0 & (f) & & \end{array} \tag{6}$$

Inými slovami, ak spotrebiteľ má ambíciu identifikovať optimálnu spotrebnú stratégiu (x_i^*, x_{0i}^*), to znamená, že spotreba x_i^* jednotiek produkcie sieťového odvetvia s cenou p a spotreba x_{0i}^* jednotiek zostávajúcich tovarov agregovaného odvetvia s jednotkovou cenou maximalizujú jeho celkovú užitočnosť v (x_i^*, x_{0i}^*), tak musí existovať taký multiplikátor λ_i^*, pre ktorý sú splnené podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera (6), čiže vektor premenných ($x_i^*, x_{0i}^*, \lambda_i^*$) je riešením sústavy rovníc a nerovníc *(a), (b), ..., (g)*.

Preskúmajme teraz niektoré ekonomicky interpretovateľné dôsledky podmienok optimálnosti Kuhna-Tuckera v kontexte analýzy správania sa spotrebiteľa na trhu produktov sieťových odvetví:

1. Podmienka *(g)* potvrdzuje, že optimálny spotrebný kôš *i*-teho spotrebiteľa (x_i^*, x_{0i}^*) pri cene p produktu sieťového odvetvia a jednotkovej cene agregovaného tovaru sa dá obstarať z rozpočtových prostriedkov w spotrebiteľa.

2. Z platnosti podmienky *(e)* vyplýva, že pre kladnú optimálnu spotrebu agregovaného tovaru x_{0i}^* je optimálna hodnota Lagrangeovho multiplikátora rovná jednej, t. j. $\lambda_i^*=1$. Za tohto predpokladu z platnosti podmienky *(b)* následne vyplýva, že pri kladnej spotrebe agregovaného tovaru x_{0i}^* a pre kladný objem spotreby produktu sieťového odvetvia x_i^*, ktorý maximalizuje užitočnosť, nutne platí, že v bode maxima užitočnosti zo spotreby komodity sieťového odvetvia je marginálna užitočnosť spotreby tejto komodity rovná jej cene, nakoľko hodnota Lagrangeovho multiplikátora sa zároveň rovná jednej, čiže $\lambda_i^* = 1$ a platí

$$mu_i\left(x_i^*\right)=\left[\frac{du\left(x_i\right)}{dx_i}\right]_{x_i=x_i^*}=p \tag{7}$$

3. Dôsledok (2) zároveň potvrdzuje ďalší dôležitý teoretický postulát, a to, že spotrebiteľ dovtedy zvyšuje spotrebu, v tomto prípade produktu sieťového odvetvia, kým marginálna užitočnosť nedosiahne úroveň trhovej ceny produktu.

4. Toto konštatovanie napokon nepriamo vyplýva aj z podmienok optimálnosti Kuhna-Tuckera *(a), (b),* kde vidíme, že v prípade ak sa podmienka *(a)* realizuje

pre optimálnu štruktúru vektora (x_i^*, x_{0i}^* , λ_i^*) ako ostrá nerovnosť, t. j. platí

$$-mu_i\left(x_i\right)+p>0$$

a marginálna užitočnosť tovaru sieťového odvetvia je teda nižšia ako jeho trhová cena, tak z podmienky *(b)* vyplýva, že spotrebiteľ tovar sieťového odvetvia nekupuje a platí

$$x_i^* = 0$$

Tento záver je logický a ekonomicky plne zdôvodniteľný, lebo v tomto prípade by prírastok užitočnosti vyvolaný nákupom tovaru nepokryl ani jeho cenu.

5. Preskúmajme ešte podrobnejšie istým spôsobom špecifickú situáciu, ktorá by nastala za predpokladu, že optimálna hodnota Lagrangeovho multiplikátora je väčšia ako jedna, t. j. platí $\lambda_i^*>1$, resp. $\lambda_i^*=1+\varepsilon$, kde $\varepsilon>0$. Pri platnosti podmienok *(d)* a *(e)* potom ale spotrebiteľ vôbec nekupuje komodity agregovanej skupiny tovarov a platí $x_{0i}^* = 0$. Z podmienky *(g)* súčasne vplýva, že spotrebiteľ všetky svoje finančné prostriedky w investuje do obstarania produktu sieťového odvetvia v objeme

$$x_i^* = \frac{w}{p_i}$$

Zároveň podmienka *(b)* potvrdzuje, že marginálna užitočnosť poslednej nakúpenej jednotky sieťového odvetvia je ešte stále väčšia ako je jeho trhová cena pri súčasnej platnosti podmienky *(a)* ako nerovnosti a platí

$$\lambda_i = 1+\varepsilon,\ \ \varepsilon>0$$

$$\left(-mu_i\left(x_i\right)+\left(1+\varepsilon\right)p\right)=0$$

$$mu_i\left(x_i\right)=\left(1+\varepsilon\right)p$$

$$p<mu_i\left(x_i\right)$$

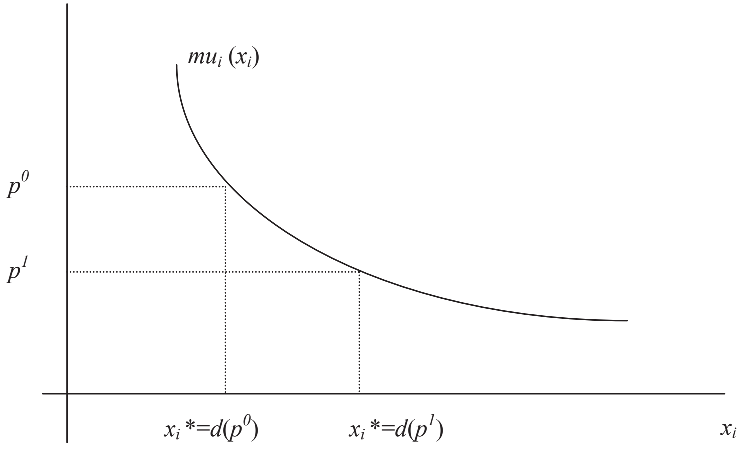
Vidíme, že v tomto prípade je rozhodnutie spotrebiteľa efektívne, nakoľko kúpa „poslednej“ jednotky tovaru sieťového odvetvia mu prináša väčší prírastok užitočnosti, ako je trhová cena tohto tovaru, takže spotrebiteľ v tejto situácii investuje celkom racionálne všetky svoje finančné prostriedky definované pre tento spotrebný kôš do kúpy produktu sieťového odvetvia.

Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera pre riešenie optimalizačnej úlohy (1), ..., (3) vysvetľujú aj charakter vzťahu medzi cenou produktu sieťového odvetvia a optimálnou úrovňou dopytu po produkte sieťového odvetvia x_i^*. Za predpokladu, že spotrebiteľ sa rozhodne pre kladný objem nákupu agregovaného tovaru $x_{0i}^*>0$, tak z podmienok *(b), (e)* vyplýva identický záver ako zo vzťahu (7), a to že funkcia hraničnej užitočnosti $mu_i\,(x_i)$ určuje pre každú úroveň trhovej ceny zodpovedajúci objem ponuky tovaru a tým de facto definuje funkciu dopytu $d_i\,(p)$ i-teho spotrebiteľa S_i takto

$$\begin{aligned} p &= mu_i\left(x_i^*\right) \\ x_i^* &= d_i\left(p\right)=mu_i^{-1}\left(p\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Keďže funkcia hraničnej užitočnosti spotrebiteľa je s rastúcim dopytom klesajúca, je dopyt po tovare tým vyšší, čím nižšia je jeho cena. Tento vzťah je geometricky prezentovaný na obrázku 1, kde je ilustrovaná zmena, v tomto prípade nárast, dopytu po produkte sieťového odvetvia z úrovne $d_i(p^0)$ na úroveň $d_i(p^1)$ pri poklese ceny produktu z hodnoty p^0 na hodnotu p^1. Krivka hraničnej užitočnosti $mu_i(x_i)$ totiž pre každú cenu produktu sieťového odvetvia p určuje zodpovedajúcu úroveň dopytu x_i^* a vyjadruje teda dopytovú funkciu $d_i(p)$ príslušného i-teho spotrebiteľa (Carlton, 2005).

Obrázok 1
Hraničná užitočnosť a individuálny dopyt



Funkcia celkového dopytu po produkte sieťového odvetvia je potom súčtom individuálnych funkcií dopytu jednotlivých spotrebiteľov S_i pre $i = 1, 2, ..., m$ a možno ju vyjadriť v analytickom tvare takto

$$d\left(p\right)=\sum_{i=1}^{m}d_i\ \left(p\right) \tag{9}$$

Spotrebiteľ je teda ochotný zaplatiť za svoj realizovaný dopyt po produkte sieťového odvetvia vo výške $d_i\ (p)$ jednotiek sumu $u_i(d_i\ (p))$ peňažných jednotiek, presne taký je totiž jeho pocit užitočnosti z tohto nákupu. Treba si však uvedomiť, že spotrebiteľ neplatí na trhu sieťového odvetvia za nákup tovaru cenu zodpovedajúcu jeho pocitu užitočnosti z nákupu tohto tovaru, ale reálne za svoj nákup požadovaného objemu tovaru zaplatí sumu $pd_i(p)$ peňažných jednotiek. Ak sú tieto jeho výdavky nižšie ako pocit uspokojenia z kúpy, t.j. platí $u_i(d_i(p)) > pd_i(p)$, tak s určitým zjednodušením môžeme povedať, že spotrebiteľ dosahuje pri trhovej cene p dodatočný blahobyt, resp. nadbytok spotrebiteľa vo výške

$$ns_i\ \left(p\right)=u_i\left(d_i\ \left(p\right)\right)-pd_i\ \left(p\right) \tag{10}$$

pričom $ns_i\ \left(p\right):R\rightarrow R$ je funkcia nadbytku i-teho spotrebiteľa.

Celkový nadbytok všetkých spotrebiteľov na trhu sledovaného sieťového odvetvia potom môžeme vyjadriť takto

$$ns(p)=\sum_{i=1}^{m}\left[u_i\left(d_i\ (p)\right)-pd_i\ (p)\right] \tag{11}$$

Pri takomto stanovení spotrebiteľského nadbytku odvetvia je však problém v tom, že použitie vzťahu (11) vyžaduje pri výpočte celkového spotrebiteľského nadbytku disponibilné informácie o individuálnych funkciách užitočnosti jednotlivých spotrebiteľov (Peppal, 2004). V praktickej rovine je však tento predpoklad nereálny. Pokúsme sa preto vyjadriť celkový nadbytok spotrebiteľov priamo z agregovanej dopytovej funkcie odvetvia na základe hraničného (marginálneho) spotrebiteľského nadbytku $ns'(p)$ takto:

$$ns'(p)=\frac{dns(p)}{dp}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u_i\left(d_i\ (p)\right)}{\partial d_i\ (p)}\frac{\partial d_i\ (p)}{\partial p}-p\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial d_i\ (p)}{\partial p}-\sum_{i=1}^{m}d_i\ (p)$$

a po ďalšej úprave dostávame

$$ns'(p)=\sum_{i=1}^{m}\left[u_i{}'\left(d_i\ (p)\right)-p\right]\frac{\partial d_i\ (p)}{\partial p}-\sum_{i=1}^{m}d_i\ (p) \tag{12}$$

Na základe vzťahu (7) však pre optimálny objem dopytu pre marginálnu užitočnosť a cenu produktu platí vzťah

$$u_i{}'\left(d_i\ (p)\right)-p=0$$

takže vzťah (12) môžeme upraviť takto

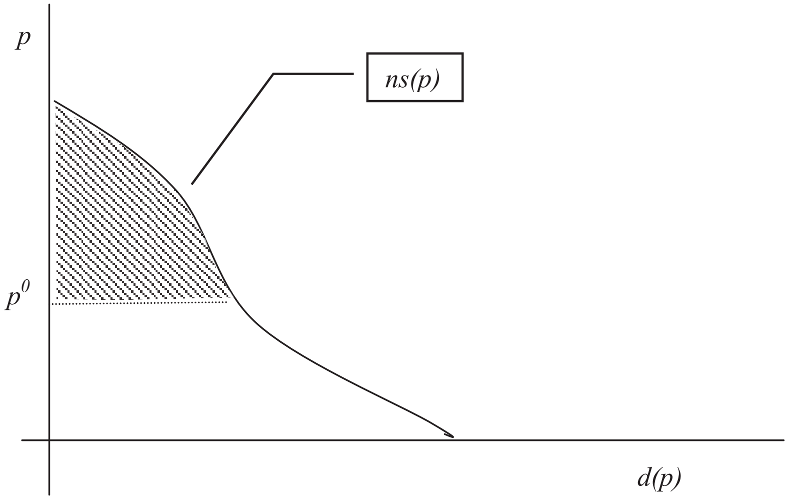
$$ns'(p)=-\sum_{i=1}^{m}d_i\ (p)=-d(p) \tag{13}$$

Za predpokladu, že funkcie dopytu po produkcii sieťového odvetvia je hladká, t. j. spojitá a diferencovateľná, tak nadbytok spotrebiteľov sieťového odvetvia sa dá kvantifikovať ako určitý integrál marginálneho nadbytku spotrebiteľov odvetvia pri poklese ceny z teoreticky „nekonečne" vysokej úrovne na úroveň aktuálnej ceny produktu p takto

$$ns(p)=\int_{p}^{\infty}d(p)dp \tag{14}$$

Hore odvodený vzťah (14) reprezentuje formulu pre výpočet celkového nadbytku spotrebiteľov na trhu sieťového odvetvia a je vyjadrený ako určitý integrál funkcie dopytu pri poklese ceny od hypoteticky nekonečne vysokej hodnoty po aktuálnu trhovú cenu p^0. Situácia je geometricky interpretovaná na obrázku 2.

Obrázok 2
Nadbytok spotrebiteľov na trhu sieťového odvetvia



Vzťah (14) sám o sebe je klasickou formulou pre výpočet nadbytku spotrebiteľa, zaujímavou je však najmä dopytová funkcia po tovare sieťového odvetvia v tvare (8), ku ktorej sme odvodili funkcie užitočnosti spotrebiteľa produktu sieťového odvetvia. Funkcia dopytu, ktorá je v prípade tohto modelu identická s riešením rovnice vyjadrujúcej rovnosť funkcie marginálnej užitočnosti produktu sieťového odvetvia a jeho ceny pre premennú dopyt x_i napokon v konečnom dôsledku len potvrdzuje už spomínanú exkluzivitu tohto tovaru pri rozhodovaní spotrebiteľa o štruktúre svojho spotrebiteľského koša. Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera potom implikujú pre optimálne riešenie úlohy optimalizácie (1), ..., (3) takú optimálnu stratégiu spotrebiteľa, ktorá garantuje jeho maximálny nadbytok pri danej cenovej hladine produktu sieťového odvetvia.

2. Podmienky optimálnosti výrobcov na trhu sieťového odvetvia

Pre komplexnú charakteristiku trhu sieťového odvetvia sa v ďalšej časti budeme zaoberať formalizovanou analýzou aktivít výrobcov na tomto trhu. Treba upozorniť na to, že aj nákladová funkcia dodávateľskej firmy, resp. výrobcu má v tomto modeli dodávateľa produktu sieťového odvetvia do istej miery atypickú vecnú interpretáciu. Podstatou tejto koncepcie je už v rámci analýzy správania sa spotrebiteľa vysvetlené vnímanie trhu, na ktorom sú všetky ostatné výrobky a služby, okrem produktu sieťového odvetvia, vyjadrené agregovaným tovarom s jednotkovou cenou.

Preto v rámci tejto analýzy nebudeme pre výpočet nákladov producenta používať faktorovú nákladovú funkciu, pri použití ktorej by sme skúmali pre výrobu y_j jednotiek produktu sieťového odvetvia spotrebu použitej technológii adekvátneho počtu jednotiek prepočítaných výrobných faktorov s jednotkovou cenou. Sústredíme sa na výrobkovú nákladovú funkciu, kde náklady sú vo všeobecnosti súčtom nákladov fixných a nákladov variabilných zodpovedajúcich danej úrovni výstupu. Konkrétna štruktúra týchto výrobných faktorov nás v tomto modeli nebude zaujímať. Výrobné náklady dodávateľa D_j spojené s produkciou y_j jednotiek vyjadruje funkcia celkových nákladov $n_j(y_j)$, o ktorej budeme predpokladať, že je spojitá a diferencovateľná, pričom vecný charakter nákladovej funkcie predpokladá definičný obor a obor funkčných hodnôt funkcie ako množiny nezáporných reálnych čísel $D\left(n_j\left(y_j\right)\right)=H\left(n_j\left(y_j\right)\right)=\left\langle 0,\infty\right)$.

Pre ďalšie analýzy budeme vyžívať štandardné nákladové funkcie, a to funkciu priemerných nákladov

$$np_j\left(y_j\right)=\frac{n_j\left(y_j\right)}{y_j},\quad y_j>0$$

a funkciu marginálnych nákladov

$$nm_j\left(y_j\right)=\frac{dn_j\left(y_j\right)}{dy_j}$$

pričom predpokladáme, že tieto funkcie sú konvexné, spojité a diferencovateľné. Keď dodávateľ D_j predáva svoju produkciu o objeme y_j za cenu p, ktorá aspoň pokrýva jeho priemerné náklady $np_j(y_j)$ a platí

$$0\le np_j\left(y_j\right)\le p$$

tak dodávateľ dosahuje individuálny zisk $z_j(y_j)$ v objeme

$$z_j\left(y_j\right)=py_j-n_j\left(y_j\right)\ge 0$$

pričom $n_j\left(y_j\right), nm_j\left(y_j\right), np_j\left(y_j\right), z_j\left(y_j\right): R\to R$ sú reálne funkcie jednej premennej.

Preskúmajme teraz správanie sa j-tej firmy z hľadiska jej prirodzenej tendencie maximalizácie zisku. Správanie sa j-tej firmy D_j pre každé j=1, 2, ..., n budeme skúmať prostredníctvom optimalizačnej úlohy maximalizácie funkcie zisku firmy D_j pri podmienke aby trhová cena produktu sieťového odvetvia p, ktorá je parametrom modelu prinajmenšom pokryla priemerné výrobné náklady firmy (Fendek, Fendeková, 2010). Táto optimalizačná úloha je pre nezápornú premennú y_j formulovaná takto

$$z_j\left(y_j\right)=py_j-n_j\left(y_j\right)\ \rightarrow\ \max$$

pri ohraničení

$$\begin{aligned}&\frac{n_j\left(y_j\right)}{y_j}\le p\\&y_j\ge 0\end{aligned}\qquad(15)$$

Hore uvedená optimalizačná úloha je úlohou maximalizácie na viazaný extrém. Upravme túto úlohu na štandardný tvar, t. j. na úlohu minimalizácie

$$-z_j\left(y_j\right) = -py_j + n_j\left(y_j\right) \;\rightarrow\; \min \tag{16}$$

pri ohraničení

$$\frac{n_j\left(y_j\right)}{y_j} - p \leq 0 \tag{17}$$

$$y_j \geq 0 \tag{18}$$

Pre túto úlohu matematického programovania (16), ..., (18) sformulujme zovšeobecnenú Lagrangeovu funkciu (Jarre, 2004) v tvare

$$\begin{aligned} L_j\left(y_j,\lambda_j\right) &= -py_j + n_j\left(y_j\right) + \lambda_j\left(\frac{n_j\left(y_j\right)}{y_j} - p\right) = \\ &= -py_j + n_j\left(y_j\right) + \lambda_j\left(n_j\left(y_j\right)y_j^{-1} - p\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Sformulujme podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera pre Lagrangeovu funkciu v tvare (19) j-teho dodavateľa D_j takto

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_j\left(y_j,\lambda_j\right)}{\partial y_j} \geq 0 && \frac{\partial L_j\left(y_j,\lambda_j\right)}{\partial \lambda_j} \leq 0 \\ &y_j\frac{\partial L_j\left(y_j,\lambda_j\right)}{\partial y_j} = 0 && \lambda_j\frac{\partial L_j\left(y_j,\lambda_j\right)}{\partial \lambda_j} = 0 \\ &y_j \geq 0 && \lambda_j \geq 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera v tvare (20) po dosadení analytického tvaru Lagrangeovej funkcie (19) a po ďalšej úprave získame v tvare

$$\begin{aligned} &-p + \frac{dn_j\left(y_j\right)}{dy_j} + \lambda_j\left(\frac{dn_j\left(y_j\right)}{dy_j}y_j^{-1} - n_j\left(y_j\right)y_j^{-2}\right) \geq 0 && \frac{n_j\left(y_j\right)}{y_j} - p \leq 0 \\ &y_j\left(-p + \frac{dn_j\left(y_j\right)}{dy_j} + \lambda_j\left(\frac{dn_j\left(y_j\right)}{dy_j}y_j^{-1} - n_j\left(y_j\right)y_j^{-2}\right)\right) = 0 && \lambda_j\left(\frac{n_j\left(y_j\right)}{y_j} - p\right) = 0 \\ &y_j \geq 0 && \lambda_j \geq 0 \end{aligned} \tag{21}$$

resp.

$$
\begin{aligned}
&-p + nm_j(y_j) + \frac{\lambda_j}{y_j}\left(nm_j(y_j) - np_j(y_j)\right) \geq 0 && (h) \qquad np_j(y_j) - p \leq 0 && (k) \\
&y_j\left(-p + nm_j(y_j) + \frac{\lambda_j}{y_j}\left(nm_j(y_j) - np_j(y_j)\right)\right) = 0 && (i) \qquad \lambda_j\left(np_j(y_j) - p\right) = 0 && (l) \quad (22) \\
&y_j \geq 0 && (j) \qquad \lambda_j \geq 0 && (m)
\end{aligned}
$$

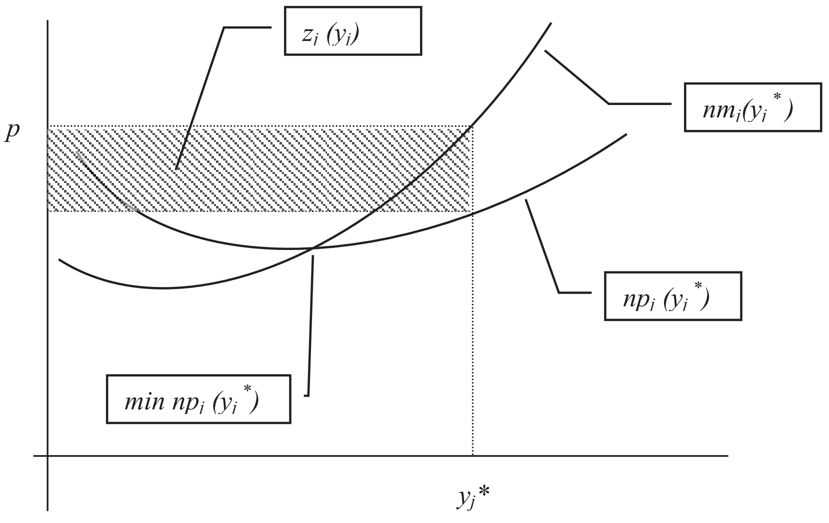
Ak dodávateľská firma bude ponúkať na trhu y_j^* jednotiek produktu sieťového odvetvia, ktoré pri jeho trhovej jednotkovej cene p budú firme garantovať maximálny zisk, tak musí existovať taký Lagrangeov multiplikátor λ_j^*, pre ktorý sú splnené podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera (22), čiže vektor premenných (y_j^*, λ_j^*) je riešením sústavy rovníc a nerovníc (h), (i), ..., (m). Z platnosti podmienok optimálnosti Kuhna-Tuckera v úlohe optimalizácie správania sa dodávateľa na trhu produktov sieťových odvetví vyplývajú nasledovné pre analýzu agregovanej ponuky trhu sieťového odvetvia významné dôsledky.

1. Zisk firmy je v účelovej funkcii optimalizačnej úlohy (15) rozdielom medzi jej výnosmi a nákladmi, pričom oborom hodnôt nákladovej funkcie $n_j(y_j)$ sú nezáporné čísla, takže zisk môže byť pri každej kladnej trhovej cene p kladný len pre kladný optimálny objem výstupu $y_j^* > 0$, t.j. podmienka (*j*) sa musí pre optimálne riešenie úlohy spĺňať ako ostrá nerovnosť. Táto podmienka napokon vyplýva aj z definičného oboru funkcie priemerných nákladov $np_j(y_j^*)$. Platnosť podmienky (*k*) zároveň garantuje, že optimálnemu objemu výstupu y_j^* zodpovedajú priemerné náklady $np_j(y_j^*)$, ktoré neprevyšujú trhovú cenu p.

2. Za predpokladu, že pre optimálny objem ponuky firmy y_j^* platia vzťahy $y_j^* > 0$, $np_j(y_j^*) \leq p$, t.j. vzťahy (*j*) a (*k*), tak pre optimálnu hodnotu Lagrangeovho multiplikátora λ_j^* môžu nastať dve situácie:

   a) Za predpokladu, že hodnota Lagrangeovho multiplikátora je nulová a platí $\lambda_j^* = 0$, tak podmienka (*l*) je splnená a z platnosti podmienky (*i*) vyplýva, že pre optimálny objem ponuky sú jej marginálne náklady rovné trhovej cene produkcie a platí $nm_j(y_j^*) = p$, pričom podmienka (*h*) sa spĺňa ako rovnosť a podmienka (*k*) sa môže spĺňať aj ako ostrá nerovnosť a trhová cena produktu v ideálnom prípade môže byť dokonca vyššia ako priemerné výrobné náklady. Vidíme teda, že v prípade nulovej hodnoty Lagrangeovho multiplikátora môže firma dosahovať kladný maximálny zisk na úrovni hodnoty $py_j^* - n_j(y_j^*)$. Tejto situácii zodpovedá geometrická interpretácia optimálneho riešenia úlohy maximalizácie zisku uvedená na obrázku 3.

Obrázok 3
Zisk producenta na trhu sieťového odvetvia



b) Za predpokladu, že hodnota Lagrangeovho multiplikátora je kladná a platí $\lambda_j^* > 0$, tak z platnosti podmienky (l) vyplýva, že pre optimálny objem ponuky sú jej priemerné náklady rovné trhovej cene produkcie a platí $np_j(y_j^*) = p$, pričom podmienka (k) sa spĺňa ako rovnosť a podmienka (i) sa dá preformulovať takto:

$$y_j\left(-p + nm_j\left(y_j\right) + \frac{\lambda_j}{y_j}\left(nm_j\left(y_j\right) - np_j\left(y_j\right)\right)\right) =$$

$$= y_j\left(-p + nm_j\left(y_j\right) + \frac{\lambda_j}{y_j}\left(nm_j\left(y_j\right) - p\right)\right) =$$

$$= y_j\left(\frac{\lambda_j}{y_j} + 1\right)\left(nm_j\left(y_j\right) - p\right) = 0$$

Z podmienky (i) teda vyplýva, že optimálnemu objemu výstupu y_j^* zodpovedajú marginálne náklady firmy $nm_j\ (y_j^*)$ na úrovni, ktorá zodpovedá trhovej cene p, t.j. platí $nm_j(y_j^*) = p$, čo však zároveň s platnosťou podmienky *(l)* implikuje rovnosť marginálnych a priemerných nákladov firmy $nm_j(y_j^*) = np_j(y_j^*)$ pre optimálny objem ponuky y_j^*. V takomto prípade je však optimálna úroveň zisku firmy nulová, čomu zodpovedá geometrická interpretácia optimálneho riešenia úlohy maximalizácie zisku uvedená na obrázku 4. Analyzujme túto situáciu z hľadiska vlastností nákladov firmy a ukážme, že v prípade uvedenej realizácie podmienok optimálnosti Kuhna-Tuckera firma ponúka práve taký objem produkcie, pre ktorý sú priemerné náklady minimálne (Fendek, Fendeková, 2008), t. j. platí $np(y_j) \rightarrow min.$

Nutnou a zároveň postačujúcou podmienkou minima konvexnej funkcie priemerných nákladov je existencia stacionárneho bodu funkcie priemerných nákladov, v ktorom je prvá derivácia funkcie $np(y_j)$ rovná nule a platí

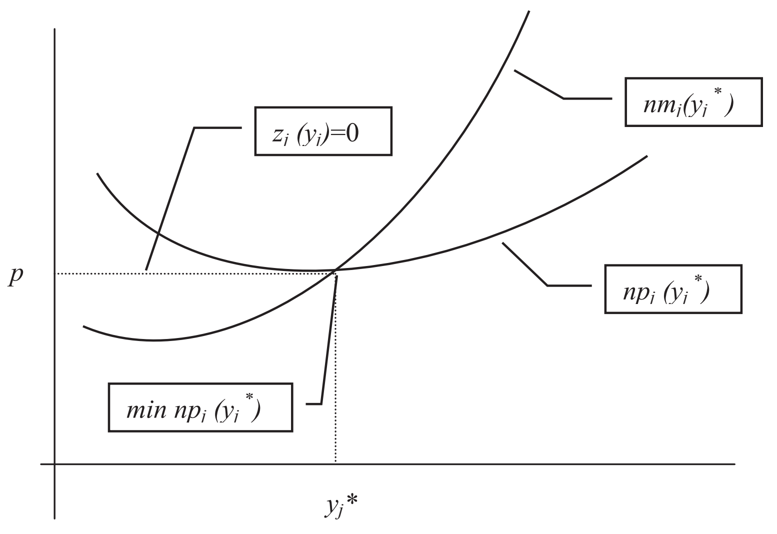
$$\frac{dnp_j\left(y_j\right)}{dy_j}=0$$

$$\frac{dnp_j\left(y_j\right)}{dy_j}=\frac{d\dfrac{n_j\left(y_j\right)}{y_j}}{dy_j}=\frac{nm_j\left(y_j\right)}{y_j}-\frac{n_j\left(y_j\right)}{y_j^{\,2}}=$$

$$=\frac{1}{y_j}\left(nm_j\left(y_j\right)-\frac{n_j\left(y_j\right)}{y_j}\right)=\frac{1}{y_j}\left(nm_j\left(y_j\right)-np_j\left(y_j\right)\right)=0\Rightarrow nm_j\left(y_j\right)=np_j\left(y_j\right)$$

Ukázali sme, že v tomto hraničnom prípade, keď dosahuje firma nulový zisk, firma ponúka taký objem produkcie, pri ktorom sa trhová cena rovná marginálnym nákladom a súčasne minimálnym priemerným nákladom.

Obrázok 4
Zisk producenta na trhu sieťového odvetvia v prípade rovnosti ceny, minimálnych priemerných a marginálnych nákladov



Za predpokladu, že na trhu pôsobí n dodávateľov D_j pre j=1, 2, ..., n a každý z nich realizuje svoj zisk podľa účelovej funkcie optimalizačnej úlohy (15), tak celkový nadbytok firiem $nf(y_1, y_2, ..., y_n)$: $R^n \rightarrow R$ ponúkajúcich sledovaný produkt sieťového odvetvia je daný vzťahom

$$nf\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \sum_{j=1}^{n}\left[py_j - n_j\left(y_j\right)\right] \tag{23}$$

Po preskúmaní podmienok optimálnosti na izolovaných trhoch ponuky a dopytu sieťového odvetvia prikročme teraz k analýze podmienok optimálnosti rovnováhy na trhu sieťového odvetvia.

3. Efektívnosť trhu sieťových odvetví

Zaoberajme sa teraz analýzou efektívnej rovnováhy ponuky a dopytu na trhu sieťových odvetví. Preskúmame, za platnosti akých podmienok sa dosahuje z hľadiska spoločenského blahobytu efektívny stav rovnováhy na trhu sieťového odvetvia, t. j. podmienok, pri ktorých je produkcia všetkých dodávateľov homogénneho produktu sieťového odvetvia jednotlivým odberateľom produktu alokovaná efektívne. Keďže výraz $\sum_{i=\overline{1,m}} v_i\left(x_i, x_{0i}\right)$ reprezentuje agregovanú pripravenosť spotrebiteľov zakúpiť si požadované objemy produktu a výraz $\sum_{j=\overline{1,n}} n_j\left(y_j\right)$ vyjadruje celkové náklady výroby všetkých dodávateľov, tak funkciu spoločenského blahobytu na sledovanom trhu môžeme formulovať takto

$$w\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0m}, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(u_i\left(x_i\right) + x_{0i}\right) - \sum_{j=1}^{n} n_j\left(y_j\right) \tag{24}$$

Vidíme, že funkcia blahobytu (24) je maximalizačnú a v spojení s vhodne skonštruovanými ohraničeniami popisujúcimi správanie sa subjektov na strane ponuky a dopytu získame úlohu optimalizácie spoločenského blahobytu v podmienkach rovnováhy medzi ponukou a dopytom na trhu sieťového odvetvia. Podmienky optimálnosti Kuhna a Tuckera pre túto úlohu nám potom umožnia exaktne popísať vlastnosti tohto rovnovážneho stavu.

Pritom sa implicitne predpokladá, že spoločenský blahobyt sa realizuje v podmienkach trhovej rovnováhy, to znamená pri rovnosti agregovanej ponuky celej množiny výrobcov a agregovaného dopytu všetkých spotrebiteľov (Pepall, 2004). Zároveň predpokladáme, že každý spotrebiteľ nakupuje produkt sieťového odvetvia v objeme x_i za trhovú cenu p a ostatné tovary v prepočítanom objeme x_{0i} nakupuje za jednotkovú cenu a na nákup spotrebného koša má vyčlenený rozpočet w_i. Ďalej predpokladáme, že každý výrobca produkuje taký objem y_j, pri ktorom jeho priemerné náklady neprevýšia trhovú cenu produktu. Čiže spoločenský blahobyt sa realizuje za platnosti nasledovných podmienok:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \tag{25}$$

$$px_i + x_{0i} = w_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{26}$$

$$n_j\left(y_j\right) y_j^{-1} - p \leq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{27}$$

Alokácia tovarov, ktorá vyhovuje podmienkam (25), (26) a (27) sa nazýva efektívnou v zmysle kritéria spoločenského blahobytu (24) v prípade, keď neexistuje žiadna iná alokácia tovarov, ktorá by pri platnosti týchto podmienok garantovala vyššiu úroveň spoločenského blahobytu. Efektívna alokácia je teda popísaná vektorom $(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}, \mathbf{y}) = (x_i, x_{0i}, y_j)$ pre i=1, 2, ..., m a j=1, 2, ..., n, ktorý je riešením nasledovnej optimalizačnej úlohy maximalizácie spoločenského blahobytu

$$w(\mathbf{x},\mathbf{x_0},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m}\left(u_i(x_i) + x_{0i}\right) - \sum_{j=1}^{n} n_j\left(y_j\right) \to \max$$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \\ &px_i + x_{0i} = w_i \qquad i = 1,\ldots,m \\ &n_j\left(y_j\right)y_j^{-1} - p \le 0 \qquad j = 1,\ldots,n \\ &x_i \ge 0 \quad i = 1,\ldots,m \\ &y_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{28}$$

Z hľadiska štruktúry úlohy (28) však treba poznamenať, že ohraničenia (26) a (27) vyjadrujú efektívnosť parciálnych spotrebných a výrobných stratégií spotrebiteľov a výrobcov pôsobiacich na trhu sieťového odvetvia. Ich splnenie je garantované riešením úloh (1), ..., (3) optimalizácie spotrebnej stratégie jednotlivých odberateľov a úloh (15) optimalizácie výrobnej stratégie jednotlivých odberateľov. Inými slovami, každý spotrebiteľ si obstaráva taký spotrebný kôš tovaru sieťového odvetvia x_i a agregovaného tovaru $x_{0i,}$ na ktorý mu stačia jeho rozpočtové prostriedky $w_.$ Rovnako každý výrobca ponúka taký objem svojej produkcie y_j, pri ktorom sú jeho priemerné náklady nižšie ako trhová cena. Stupeň náročnosti optimalizačnej úlohy (28) je determinovaný vlastnosťami funkcií užitočnosti $u_i(x_i)$ a a nákladových funkcií $n_j(x_j)$.

Takže v úlohe maximalizácie spoločenského blahobytu budeme v konečnom dôsledku sledovať splnenie iba základnej podmienky rovnováhy medzi ponukou a dopytom sieťového odvetvia. Dostávame potom nasledovnú formuláciu optimalizačnej úlohy, ktorej riešením je efektívna alokácia popísaná vektorom $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_i, y_j)$ pre i=1, 2, ..., m a j=1, 2, ..., n

$$w(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} u_i(x_i) - \sum_{j=1}^{n} n_j\left(y_j\right) \to \max$$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \\ &x_i \ge 0 \quad i = 1,\ldots,m \\ &y_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{29}$$

Úlohu upravme na štandardný tvar, t. j. na úlohu s minimalizačnou účelovou funkciou takto:

$$-w(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^{m} u_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n} n_j(y_j) \rightarrow \min \tag{30}$$

pri ohraničení

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \\ &x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m \\ &y_j \geq 0 \quad j = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{31}$$

Pre úlohu (30), (31) ďalej sformulujme zovšeobecnenú Lagrangeovu funkciu s Lagrangeovým multiplikátorom λ v nasledovnom tvare

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda) = -\sum_{i=1}^{m} u_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n} n_j(y_j) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j\right) \tag{32}$$

Preskúmajme podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera pre Lagrangeovu funkciu (32) optimalizačnej úlohy (30), (31)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L(x_i, y_j, \lambda)}{\partial x_i} \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad \frac{\partial L(x_i, y_j, \lambda)}{\partial y_j} \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad \frac{\partial L(x_i, y_j, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \\ &x_i \frac{\partial L(x_i, y_j, \lambda)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad y_j \frac{\partial L(x_i, y_j, \lambda)}{\partial y_j} \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \\ &x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad y_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{33}$$

Po dosadení Lagrangeovej funkcie (32) do podmienok optimálnosti (33) a po ďalšej úprave dostávame podmienky optimálnosti v tvare

$$\begin{aligned} &\frac{-\partial u_i(x_i)}{\partial x_i} + \lambda \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad \frac{\partial n_j(y_j)}{\partial y_j} - \lambda \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j = 0 \\ &x_i\left(\frac{-\partial u_i(x_i)}{\partial x_i} + \lambda\right) = 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad y_j\left(\frac{\partial n_j(y_j)}{\partial y_j} - \lambda\right) = 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \\ &x_i \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad y_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{34}$$

resp.

$$\begin{aligned} &-mu_i(x_i) + \lambda \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \quad (n) \qquad nm_j(y_j) - \lambda \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \quad (r) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j = 0 \quad (u) \\ &x_i(-mu_i(x_i) + \lambda) = 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \quad (o) \qquad y_j(nm_j(y_j) - \lambda) = 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \quad (s) \\ &x_i \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \quad (p) \qquad y_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \quad (t) \end{aligned} \tag{35}$$

Ak sa teda jednotliví odberatelia produktu sieťového odvetvia rozhodnú pre optimálnu spotrebu $x_i,^*$ pre i=1, 2, ..., m a jednotliví výrobcovia produktu sieťového odvetvia sa rozhodnú pre optimálnu výrobu $y_j,^*$ pre j=1, 2, ..., n, to znamená, že celkový dopyt a ponuka sú na trhu v rovnováhe pri súčasnej maximálnej hodnote funkcie spoločenského blahobytu $w(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, tak musí existovať taký multiplikátor λ^*, pre ktorý sú splnené podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera (34), čiže vektor premenných $(x_1^*, ..., x_m^*, y_1^*, ..., y_n^*, \lambda^*)$ je riešením sústavy rovníc a nerovníc (n), (o), ..., (u). Na základe podmienok optimálnosti Kuhna-Tuckera môžeme pre optimalizačnú úlohu (28) maximalizácie spoločenského blahobytu v podmienkach rovnováhy na trhu produktov sieťových odvetví formulovať nasledovné ekonomicky interpretovateľné dôsledky:

1. V prvom rade si všimnime, že platnosť podmienky (u) garantuje stav očakávanej trhovej rovnováhy medzi agregovaným dopytom a agregovanou ponukou na trhu sieťového odvetvia.

2. Za predpokladu, že každý spotrebiteľ časť svojich prostriedkov vynaloží na kúpu tovaru sieťového odvetvia, to znamená, že zodpovedajúce premenné majú kladné hodnoty a podmienka (p) sa realizuje ako ostrá nerovnosť $x_i^* > 0$, tak potom z platnosti podmienky (o) vyplýva, že pre každého spotrebiteľa pre optimálne riešenie úlohy (29) platí $mu_i(x_i)=\lambda$. Inými slovami, v bode efektívnej rovnováhy trhu sieťového odvetvia maximalizujúcej spoločenský blahobyt je marginálna užitočnosť jednotlivými spotrebiteľmi zakúpeného individuálneho objemu x_i^* tovaru sieťového odvetvia identická.

3. Skúmajme teraz podobným spôsobom správanie sa dodávateľov na trhu sieťového odvetvia. Pre každého dodávateľa, ktorý má ambíciu uplatniť sa na trhu a ponúkať kladný objem produktu sa podmienka (t) realizuje ako ostrá nerovnosť $y_j^* > 0$ a z platnosti podmienky (s) vyplýva, že pre každého dodávateľa pre optimálne riešenie úlohy (29) platí $nm_j(y_j)=\lambda$. To ale znamená, že podobne ako v prípade marginálnej užitočnosti odberateľov, aj tu v bode efektívnej rovnováhy trhu sieťového odvetvia maximalizujúcej spoločenský blahobyt sú marginálne náklady jednotlivými dodávateľmi ponúkaného individuálneho objemu y_j^* tovaru sieťového odvetvia identické.

4. Pri kladných objemoch ponuky $y_j^* > 0$ a dopytu $x_i^* > 0$ potom zároveň z platnosti podmienok *(o)* a *(s)* v rovnovážnom stave trhu sieťového odvetvia vyplýva, že marginálne náklady všetkých výrobcov a marginálne užitočnosti všetkých spotrebiteľov sú identické a platí $nm_j(y_j)=mu_i(x_i)=\lambda$ pre všetky i=1, 2, ..., m a j=1, 2, ..., n. Inými slovami, v stave rovnováhy je prírastok užitočnosti v peňažných jednotkách vyvolaný nákupom poslednej jednotky produktu sieťového odvetvia u každého spotrebiteľa, ako aj prírastok nákladov v peňažných jednotkách vyvolaný výrobou poslednej jednotky produktu sieťového odvetvia u každého výrobcu identický.

Ak zovšeobecníme tento poznatok, tak dospejeme k záveru, že v bode krátkodobej rovnováhy na trhu sieťového odvetvia každý spotrebiteľ nakupuje taký optimálny objem produktu sieťového odvetvia, pri ktorom sú marginálne užitočnosti všetkých spotrebiteľov identické, to znamená, že každý spotrebiteľ pociťuje pri kúpe poslednej jednotky produktu rovnaký prírastok užitočnosti. Uvedomme si zároveň, že individuálne, a vo všeobecnosti nie rovnaké, objemy nákupov u jednotlivých spotrebiteľov odrážajú ich individuálne preferencie na spotrebu produktu sieťového odvetvia.

Analogicky v bode krátkodobej rovnováhy na trhu sieťového odvetvia každý výrobca ponúka taký optimálny objem produktu sieťového odvetvia, pri ktorom sú marginálne náklady všetkých výrobcov identické, to znamená, že každý výrobca zaznamená pri výrobu poslednej jednotky produktu rovnaký prírastok nákladov. Aj v tomto prípade si však treba uvedomiť, že individuálne, a aj tu samozrejme nie identické, objemy ponuky u jednotlivých výrobcov odrážajú ich individuálne technologické podmienky výroby analyticky prezentované funkciou marginálnych nákladov.

Záver

V článku sme skúmali podmienky optimálnosti pre parciálne modely optimálneho správania spotrebiteľov a producentov na trhu sieťových odvetví, ako aj podmienky optimálnosti pre model efektívnej alokácie produktov na tomto trhu. Ukázali sme, ako poznatky vyplývajúce z analýzy podmienok optimálnosti Kuhna-Tuckera formulované pre relevantné úlohy matematického programovania možno efektívne využiť pri interpretácii vecných vzťahov, zákonitostí a strategických rozhodnutí pri správaní sa spotrebiteľov a výrobcov na trhu sieťového odvetvia.

Porušenie podmienok rovnováhy samozrejme nemožno vylúčiť, reálny ekonomický život totiž aj predpokladá určitý vývoj a nestabilitu na každom trhu a teda aj relatívnu krátkodobosť platnosti podmienok rovnováhy, čo v konečnom dôsledku napokon ani nepredstavuje neriešiteľný problém, je však potrebné situáciu kvalifikovane identifikovať a vyhodnotiť možné reakcie na zmenu parametrov systému.

Keby pre stav rovnováhy na trhu sieťového odvetvia neplatili podmienky optimálnosti Kuhna a Tuckera, mohli by niektorí spotrebitelia prostredníctvom výmeny zvýšiť svoju užitočnosť. V takomto prípade by totiž spotrebiteľ s vyššou hraničnou užitočnosťou a teda aj s vyššou hraničnou ochotou zaplatiť za agregovaný tovar mohol zodpovedajúci počet jednotiek produktu sieťového tovaru získať za adekvátny objem agregovaného tovaru od spotrebiteľa s nižšou marginálnou užitočnosťou, čím by si mohli v konečnom dôsledku obaja spotrebitelia svoje pozície na trhu zlepšiť. Rovnako by bolo možné v situácii, keby neplatila podmienka identických marginálnych nákladov pre všetkých výrobcov ponúkajúcich kladné objemy produktov sieťového odvetvia, dosiahnuť vyššiu celkovú ponuku na trhu pri nezmenených celkových nákladoch odvetvia jednoduchým presunutím časti produkcie od výrobcu s vyššími marginálnymi nákladmi k výrobcovi s nižšími marginálnymi nákladmi.

Aj dôsledok (4) o rovnosti marginálnej užitočnosti spotrebiteľov a marginálnych nákladoch výrobcov v stave rovnováhy na reálnom trhu má zväčša len krátkodobý charakter, V prípade porušenia podmienok rovnováhy, napríklad pri dominancii platobnej ochoty spotrebiteľov nad marginálnymi nákladmi výrobcov možno celkový blahobyt $w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zvýšiť.

Ukázali sme teda, že využitie teórie optimalizácie pri analýze podmienok rovnováhy na trhu ponuky a dopytu sieťových odvetví umožňuje efektívne skúmať podmienky vzniku rovnováhy ako i dôsledky zmien parametrov trhového prostredia, ktoré majú za následok zmeny atribútov rovnovážneho stavu.

Literatúra

BESANKO, D. A.; BRAEUTIGAN, R. R. 2002. *Microeconomics. An integrated Approach.* New York: John Willey and Sons, Inc., 2002. ISBN 0-471-17064-X

BREZINA, I.; ORŠULOVÁ, A.; PEKÁR, J. 2009. Analýza absolútnej koncentrácie vybraného odvetvia pomocou Herfindahlovho-Hirschmanovho indexu. *Ekonomický časopis*. 2009, Vol. 57, No. 1, pp. 77–94.

CARLTON, D. W.; PERLOFF, J. M. 2005. *Modern Industrial Organization*. Boston: Addison Wesley, 2005. ISBN 0-321-22341-1.

FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, N. 2008. *Mikroekonomická analýza*. Bratislava: IURA Edition, 2008. 557 strán. ISBN 80-88715-54-7.

FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, N. 2010. Modely cenovej regulácie sieťových odvetví. *Ekonomický časopis*. 2010, Vol. 58, No. 10, pp. 1039–1055. ISSN 0013-3035, 2010,

FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, N. 2009. Models of regulation of network industries in Slovakia. *International journal of economics and business research*. 2009, Vol. 1, No. 4, pp. 479–495. ISSN 1756-9850.

FENDEK, M. 2008. Natural monopoly cost-oriented price regulation. In *Quantitative methods in economics: multiple criteria decision making XIV*. *– Bratislava*. Bratislava: IURA Edition, 2008, pp. 45–53. ISBN 978-80-8078-217-7.

JARRE, F.; STOER, J. 2004. *Optimierung.* Berlin: Springer Verlag, 2004. ISBN3-540-43575-1.

O'SULLIVAN, A.; SHEFFRIN, S.; PEREZ , P. 2006. *Microeconomics: Principles, Applications, and Tools*. New York: Prentice Hall, ISBN 978-0136094050.

PEPALL, L.; RICHARDS, D. J.; NORMAN, D. 2004. *Industrial Organization: Contemporary Theory and Practice (with Economic Applications).* New York: South-Western College Publishing, 2004.

WISCUSI, W. K.; VERNON, J. M.; HARRINGTON, J. E. 2004. *Economics of Regulation and Antitrust*. Cambridge: The MIT Press, 2004.

KUHN-TUCKER OPTIMALITY CONDITIONS IN EQUILIBRIUM MODELS OF NETWORK INDUSTRIES MARKET

Eleonora Fendeková, Michal Fendek, University of Economics in Bratislava, Dolnozemská cesta 1/b, SR – 852 35 Bratislava 5 (fendek@dec.euba.sk, nfendek@dec.euba.sk)

Abstract

Currently a considerable attention to the subject of network industries is being paid in discussions on various levels. It is understandable as network industries in fact ensure the production and distribution of energy sources which play a key role in developed economies. The discussions are usually focused on the question of reasonable profit of network industries subjects and on the other hand the question of generally acceptable costs.

Equilibrium on the network industries market, as well as on any market, is being created based on the level of demand and supply on relevant market. In this article we will discuss the analysis of optimization models of consumers and producers behavior on the network industries market as well as the question of effectiveness of this specific market. We will point out certain features of network industries market where the consumer usually is not able to substitute a product of network industry with other product of appropriate characteristics in a short time period, thus considering the product being exclusive. This exclusivity can be formally represented in the utility function and other related analytical tasks. In paper we study the properties of a network industry optimization problem and economically interpretable implications of Kuhn-Tucker optimality conditions of this model.

Keywords

utility function, consumer preferences, consumers' surplus, producers' surplus, social welfare, network industries, Kuhn-Tucker optimality conditions.

JEL Classification

C61, C62 D61, L11