

# EFEKTIVITA KAPITÁLOVÝCH TRHŮ: FRAKTÁLNÍ DIMENZE, HURSTŮV EXPONENT A ENTROPIE

Ladislav Křišťoufek, Miloslav Vošvrda, Ústav teorie informace a automatizace, AV ČR, v.v.i., Institut ekonomických studií FSV UK\*

---

## 1. Úvod

Koncept efektivity kapitálových trhů je centrálním pojmem v teorii finančních trhů. Pojem je všeobecně užíván pro vyjádření ideálního obrazu takového kapitálového trhu, který umožňuje zpracovávat relevantní informace pro generování fundamentální ceny cenného papíru. Jestliže relevantní informace pro generování fundamentální ceny je zpracována beze zbytku cenovým mechanismem kapitálového trhu, potom takový kapitálový trh je nazývaný efektivní. Tedy efektivnost kapitálových trhů akcentuje informační efektivnost kapitálových trhů. Pojem efektivity kapitálových trhů reprezentuje takový kapitálový trh, kde ceny obchodovaných cenných papírů, tj. akcií, bondů a cenných papírů, vždy reflektují všechny známé informace a kde investoři jsou zcela racionální a přístrojově vybaveni adekvátním způsobem. Takže pojem efektivity kapitálových trhů reprezentuje formu spravedlivé hry. Investor nemůže mít žádnou výhodu v predikování výnosů investice, protože žádný z nástrojů predikce nenese informaci, která by byla komukoliv přínosná. To znamená, že investoři na efektivních kapitálových trzích nemohou očekávat dosahování enormních výnosů systematicky. Jinými slovy, kapitálový trh je efektivní, jestliže fluktuace výnosů jsou nepredikovatelné (Fama, 1970, Malkiel, 2003).

Samotné měření efektivnosti kapitálových trhů se od svých počátků potýká s problémem dvojí hypotézy, tedy pokud zamítneme efektivnost daného trhu, může to být způsobeno špatným předpokladem o skutečném chování daného trhu. Tento problém byl uznán i otcem hypotézy efektivních trhů Eugenem Fama (Fama, 1991). V tomto článku se tento problém pokusíme obejít tím, že o efektivním trhu předpokládáme, že procesy na něm pozorované jsou martingalem. Použijeme pak metod fraktální dimenze, Hurstova exponentu (dlouhé paměti procesu) a entropie k popsání efektivity daného trhu.

Hurstův exponent je již dlouhodobě zkoumán pro různé finanční produkty jako akciové indexy (Di Matteo *et al.*, 2007 a Křišťoufek, 2010a), úrokové míry (Cajueiro a Tabak, 2007), dluhopisy (Carbone *et al.*, 2004), směnné kurzy (Vandewalle *et al.*, 1997) a další. Abychom byli schopni odhadnout fraktální dimenzi přes Tsallisovu

---

\* Poděkování: výzkum byl realizován za podpory grantů GAČR 402/09/0965, GAUK 118310 a SVV 261 501.

entropii, předpokládáme dále, že logaritmické výnosy cen jsou rozděleny podle  $q$ -Gaussovy distribuce. Tato distribuce je limitním rozdělením pro Tsallisovu entropii a lépe charakterizuje situaci na finančních trzích, kde jsou výnosy vzdálené od normálního rozdělení a nejsou nezávislé (Tsallis, 1997).

Pomocí zmíněných třech měř pak sestavíme novou míru efektivnosti trhu přes normu odchylek daných měř od ideálního stavu, tedy stavu, kdy je trh efektivní, a to jak na lokální úrovni (fraktální dimenze), tak na globální úrovni (Hurstův exponent, entropie). Pokud se navíc výsledky daných přístupů liší, můžeme rozlišit mezi lokálními a globálními neefektivitami. Zkoumáme takto více jak 40 akciových indexů od začátku roku 2000 do konce srpna 2011 (datový soubor tedy zahrnuje jak výrazné poklesy indexů po splasknutí internetové bubliny, tak současnou krizi, resp. současné krize).

Článek je rozdělen následovně. V druhé kapitole zavádíme základní definice efektivity kapitálových trhů. V kapitole tři popíšeme vztah mezi efektivitou trhu a různými měrami, které jsou v článku použité. Ve čtvrté kapitole popíšeme metody odhadu fraktální dimenze, Hurstova exponentu a entropie, dále popíšeme naši míru efektivnosti trhu. V kapitole páté uvedeme výsledky a v poslední kapitole shrneme naše závěry.

## 2. Efektivita kapitálového trhu

Přejdeme k formálnímu aparátu. Nechť trojice  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je určena pro stochastický kapitálový trh. Nechť  $\{\omega \in \Omega\}$  bude množina elementárních tržních situací. Nechť  $\mathcal{F}$  je  $\sigma$ -algebra podmnožin prostoru  $\Omega$ ,  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  a  $P$  je rezervováno pro pravděpodobnostní míru na  $\mathcal{F}$ . Výraz  $E[X(\omega)|\mathcal{F}']$  zobrazuje podmíněnou střední hodnotu a výraz  $E[(X(\omega) - E[X(\omega)|\mathcal{F}'])^2|\mathcal{F}']$  zobrazuje podmíněný rozptyl. Tato struktura nám dává všechny prostředky pro vyjádření statických situací zahrnujících náhodnost na kapitálových trzích. Pro dynamické situace zahrnující náhodnost v čase je třeba zahrnout do úvah ještě posloupnosti  $\sigma$ -algeber  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ . Inkluze  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$  pro  $\forall t \in \mathcal{F}_t$  reprezentuje informaci přicházející v čase  $t$ . Předpokládejme, že všechny  $\sigma$ -algebry jsou úplné. Tedy  $\mathcal{F}_0$  reprezentuje počáteční informaci. Na druhé straně situace, že všechny informace jsou veřejné k dispozici, je reprezentována podle výrazu  $\mathcal{F}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}_t$ . Pravděpodobnostní prostor obdařený posloupností  $\{\mathcal{F}_{t \geq 0}\}$  má nyní formu  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t \geq 0}\}, P)$  a je nazýván stochastickou bází. Prostor statistik  $(S, A)$ , vytvořených nad touto bází a určený pro statistickou analýzu, je měřitelný.

Nechť  $\{X_t(\omega)\}_{t \geq 0}$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin definovaných na  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t \geq 0}\}, P)$ , nabývajících hodnot v  $(S, A)$  a majících pravděpodobnostní rozdělení  $P = P^X$ . Takto definovaný prostor pokrývá všechny možné finanční nástroje a jejich varianty vyskytující se na kapitálovém trhu. Nechť  $M$  je prostor všech měřitelných funkcí z  $(S, A)$  na  $(\mathcal{H}, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$ , kde  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  tvoří borelovskou  $\sigma$ -algebru podprostorů z  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{H}$  je  $n$ -rozměrný euklidovský prostor. Prostor  $M$  obsahuje všechny možné statistiky pro měření indikátorů na kapitálových trzích a sledování jejich trajektorií.

Množina  $\{\mathcal{F}_{t \geq 0}\}$  je někdy nazývána informačním tokem a  $\{S_t\}_{t \geq 0} \in \mathbf{M}$  je obvykle prostor cen indexů cenných papírů. Kapitálový trh  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t \geq 0}\}, P)$  je nazýván efektivním, jestliže  $E[\Delta S_t \Delta S_{t+k}] = 0$ , kde  $\Delta S_{t+k} \equiv S_{t+k} - S_{t+k-1}$ . Takže efektivita kapitálových trhů se obvykle měří na indikátoru martingalové difference výnosů cenných papírů.

### 3. Vztah efektivního kapitálového trhu, fraktální dimenze, dlouhé paměti a entropie

Prostor časových řad fluktuací popsaných v předešlé kapitole může být generován pomocí Brownova pohybu, a prostor mnoha prostorů časových řad takových fluktuací může být generován pomocí nějakého směřovacího mechanismu Brownových pohybů rušených procesem Lévyho schodů (flights). Předpokládejme teoretický model efektivního kapitálového trhu s Brownovým pohybem. Asymptoticky obdržíme normální rozdělení výnosů, a empirické rozdělení výnosů bude asymptoticky velmi blízko k normálnímu rozdělení. Ve vícerozměrném teoretickém modelu efektivního kapitálového trhu s vícerozměrným Brownovým pohybem obdržíme asymptoticky vícerozměrné normální rozdělení výnosů a vícerozměrnou empirickou distribuci výnosů, které bude asymptoticky velmi blízko k vícerozměrnému normálnímu rozdělení. Tedy vícerozměrné empirické rozdělení výnosů směřuje asymptoticky k vícerozměrnému normálnímu rozdělení.

Pro  $n$ -rozměrné normální rozdělení má hustota  $n$ -rozměrného normálního rozdělení ve výběrovém prostoru  $n-1$  rozměrný kulový charakter. V tomto případě jsou investiční výnosy stejné pro všechny investiční horizonty, a povrch tohoto prostoru bude tedy hladký. Proto paradoxně dosažení ideálního efektivního kapitálového trhu umožňujícího efektivní alokaci kapitálu nepřináší žádnou motivaci investorům, a ani nedává žádný prostor spekulantům. Reálné zkušenosti s kapitálovými trhy však ukazují, že existují investoři, kteří hledají na trzích diskrepance od ideálního stavu. Tato diskrepance vytváří hrubnutí povrchu tohoto prostoru.

Míra hrubosti povrchu  $D$  spojená s  $n-1$  rozměrnou koulí je nazývaná fraktální dimenze. Tedy fraktální dimenze  $D \in \langle n-1, n \rangle$  pro nadrovinu v  $\mathcal{R}^n$  je lokální vlastnost. Dlouhodobá závislost v časových řadách fluktuací cen na kapitálových trzích je spojována s mocninným zákonem korelací. Tento fakt je často nazýván Hurstovým efektem a je měřen Hurstovým exponentem  $H$ . Dlouhodobá paměť je globální vlastnost. Proto  $D$  a  $H$  jsou nezávislé jedna na druhé. Pro sebe-afinní reprezentace dynamických cenových procesů<sup>1</sup> na kapitálových trzích platí, že lokální vlastnosti, jako je stádovost a strach, jsou reflektovány v globálních vlastnostech a vyhovují relaci  $D + H = n + 1$ . Pro  $n = 1$  dostaneme známý vztah  $D + H = 2$ .

<sup>1</sup> Sebe-afinní procesy jsou takové procesy s diferencemi  $X_t$  pro  $-\infty < t < \infty$ , pro které platí

$X(t_0 + \tau) - X(t_0) \rightarrow h^{-H} (X(t_0 + h\tau) - X(t_0))$  pro všechna  $t_0$ , kladné  $h$ , kladnou časovou škálu  $\tau$  a nezáporný parametr  $H$  (Mandelbrot a van Ness, 1968).  $H$  v tomto předpisu se ne nutně shoduje s Hurstovým exponentem u dlouhé paměti.

Dlouhodobá strukturální závislost je spojována s  $H \in (0,5; 1)$  a nízkou fraktální dimenzí. Vyšší fraktální dimenze  $D \in (1,5; 2)$  je spojována s anti-persistentním procesem, kde  $H \in (0; 0,5)$ . Jestliže  $H$  klesá k hodnotě 0,5, potom  $D$  vzrůstá k hodnotě 1,5. Proces s  $H$ , které se blíží k hodnotě 0,5, by měl mít  $D$  velmi blízko k hodnotě 1,5. Potom proces s touto vlastností nezahrnuje žádnou závislostní strukturu. Takový případ je typický k stavům systémů s maximální entropií. Z toho plyne, že kapitálový trh je efektivní, jestliže entropie výnosů je maximální. Entropie výnosů bude maximální, jestliže  $D - H = 1$ . V případě sebe-afinního procesu, tedy  $D = 2 - H$ , je entropie výnosů maximální v případě, kdy  $H = 0,5$  a  $D = 1,5$ . Stacionárním procesem s konečným rozptylem, který takovému předpisu odpovídá, je Brownův pohyb (Mandelbrot a van Ness, 1968, Gneiting a Schlather, 2001).

Opusťme předpoklad racionálních investorů a uvažujme investory, kteří bezprostředně nereagují na obdrženou informaci. Tato zpoždění umožňují vytvořit fraktální kapitálový model trhu (Peters, 1994). Struktura investorů, kteří reagují na různé změny trendových parametrů se zpožděním, umožňuje tvořit nový typ investorových reakcí, a to hlavně nelineární formou. Tedy nelineární forma ovlivňuje normalitu rozložení výnosů. Jestliže jsou všechny časové horizonty stejné, potom kapitálový trh je nestabilním, neboť všichni investoři reagují, vzhledem k téže informaci, ve stejný časový okamžik, a to stejně. Takové nestabilní chování je zesilováno podle individuálních predispozic tržních agentů, jako jsou stádovost a obavy. Změny sentimentu agentů jsou cyklické z růstově příznivých stavů, které zapříčiňují, že ceny rostou, až k obavám, které zapříčiňují, že ceny klesají. Protože stádní chování je v podstatě iracionální, kapitálové trhy jsou tedy vedeny k nestabilitě.

## 4. Metodologie

V této kapitole popíšeme základní metodologii užitých metod, tedy fraktální dimenze, Hurstova exponentu a entropie. Jelikož jsou metody v literatuře dobře známé a zavedené, omezujeme se u nich pouze na stručný popis.

### 4.1 Fraktální dimenze

Pro odhad fraktální či informační dimenze použijeme odhad zobecněné entropie Tsallise. Zobecněná entropie  ${}_q H_t$  (Tsallisova entropie) na kapitálovém trhu  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t \geq 0}\}, P)$  v čase  $t$  je definována následujícím výrazem

$${}_q H_t = \frac{1 - \int g_t^q(x) dx}{q - 1},$$

kde  $g_t(x)$  je hustota pravděpodobnosti tržního indexu a parametr  $q$  je nazývaný entropický index. Entropický index vyjadřuje citlivost k počátečním podmínkám. Pro odhad parametru  $q$  použijeme momentové metody přes čtvrtý moment  $q$ -Gaussova rozdělení. Na místo hustoty pravděpodobnosti  $g_t(x)$  užíváme jejího empirického odhadu (Tsallis, 1997, Costa *et al.*, 1997 a Lyra a Tsallis, 1998).

## 4.2 Hurstův exponent

Hurstův exponent  $H$ ,  $0 < H < 1$ , je charakteristickou mírou pro dlouhou paměť v časových řadách, který popisuje asymptoticky hyperbolický pokles autokorelační funkce,  $\rho(k) \propto k^{2H-2}$ , kde  $k$  je zpoždění. Pokud platí  $H > 0,5$ , pak je řada persistentní a následuje lokální trendy. Naopak pro  $H < 0,5$  je řada anti-persistentní a mění znaménko častěji, než bychom očekávali pro náhodný proces. Celkově odchylka od  $H = 0,5$  implikuje možnou arbitráž a obchodní strategie s nadprůměrnými rizikově očištěnými zisky, jelikož autokorelace v časové řadě klesají velice pomalu (Mandelbrot a van Ness, 1968). Z mnoha odhadů Hurstova exponentu používáme ty nejpopulárnější – detrendovanou flukтуаční analýzu (detrended fluctuation analysis, DFA), metodu přeškálovaných rozsahů (rescaled range analysis, RS), detrendující klouzavé průměry (detrending moving average, DMA) a výškovou korelační analýzu (height-height correlation analysis, HHCA).

### 4.2.1 R/S

Metoda přeškálovaných rozsahů je nejtradičnější, tedy nejstarší, metodou, která byla navržena Hurstem (1951). Z časové řady  $X(t)$ , kde  $t = 0, 1, \dots, T$ , vezmeme první diference a získáme novou řadu. Pro délku  $v$  rozdělíme řadu na  $T/v$  částí a v každé části odhadneme směrodatnou odchylku  $S$ . V každé části sestavíme profil řady, tedy kumulované odchylky od průměru dané části. Následně spočteme rozsah  $R$  profilu, tedy rozdíl mezi maximem a minimem řady. Pro sebedpodobné procesy přeškálovaný rozsah  $R/S_v$  škáluje dle pravidla  $R/S_v \propto v^H$ . Pro dělení období na jednotlivé subperiody  $v$  dělíme stejným způsobem jako v metodě DFA podle Kantelhardt *et al.* (2002), pro lepší srovnatelnost výsledků.

### 4.2.2 DFA

Detrendovaná flukтуаční analýza, navržena Pengem *et al.* (1994), je založená na škálování rozptýlů detrendované řady. Podobně jako pro R/S sestavíme profil řady pro části o délce  $s$  a pro profil odhadneme polynomiální trend  $X_s(t)$ . Sestavíme detrendovanou řadu  $Y_s(t) = X(t) - X_s(t)$ . Fluktuace  $F_{DFA}^2(s)$ , které jsou definované jako průměr střední čtvercové chyby lineárního odhadu přes všechny části řady o délce  $s$ , škálují podle vzorce  $F_{DFA}^2(s) \propto s^{2H}$  (Kantelhardt *et al.*, 2002). Podle standardních doporučení používáme  $s$  v rozsahu hodnot  $s_{min} = 5$  a  $s_{max} = T/5$ .

### 4.2.3 DMA

Detrendující klouzavé průměry (Alessio *et al.*, 2002) jsou založené na filtrování přes klouzavé průměry. Pro velikost okna klouzavého průměru  $\lambda$  sestrojíme centrovány klouzavý průměr  $\bar{X}_\lambda(t)$  pro každý bod řady  $X(t)$ . Podobně jako pro DFA definujeme fluktuaci  $F_{DMA}^2(\lambda)$  jako střední čtvercovou chybu mezi  $X(t)$  a  $\bar{X}_\lambda(t)$ , která pak škáluje podle vzorce  $F_{DMA}^2(\lambda) \propto \lambda^{2H}$ . Jelikož používáme centrovaný klouzavý průměr jako

filtr, použijeme okno  $\lambda$  v rozmezí  $\lambda_{\min} = 3$  a  $\lambda_{\max} = 2I$  s krokem 2. Pro krajní hodnoty klouzavé průměry nedopočítáváme.

#### 4.2.4 HHCA

Výšková korelační analýza (Barabasi *et al.*, 1991) spočívá na škálování výškové korelační funkce řady  $X(t)$  s časovým rozlišením  $K$  a  $t = \nu, 2\nu, \dots, \nu \left\lfloor \frac{T}{\nu} \right\rfloor$  (kde  $\lfloor \cdot \rfloor$  značí celou dolní část čísla). Výšková korelační funkce druhého řádu řady  $X(t)$  je nadefinovaná jako  $K_2(\tau) = \sum_{t=1}^{\lfloor T/\nu \rfloor} |X(t+\tau) - X(t)|^2 / \lfloor T/\nu \rfloor$ , kde časový interval  $\tau$  nabývá hodnot  $\nu = \tau_{\min}, \dots, \tau_{\max}$ .  $K_2(\tau)$  pak škáluje podle předpisu  $K_2(\tau) \propto \tau^{2H}$ . V naší aplikaci používáme  $\tau_{\min} = 1$  a maximální  $\tau$  variujeme mezi  $\tau_{\max} = 5$  a  $\tau_{\max} = 20$ . Takto získáme více odhadů Hurstova exponentu a dále použijeme jejich průměr (užíváme tedy metody jackknifu).

#### 4.3 Míra efektivity kapitálového trhu

Pro konstrukci míry efektivity trhu využijeme faktu, že jak fraktální dimenze, tak Hurstův exponent mají pro univariátní případ stejně široký obor hodnot ( $0 < H < 1$  a  $1 \leq D < 2$ ), a fakt, že míra entropie, tedy  $D - H$ , je omezená mezi hodnotami 0 a 2. Můžeme tedy pro dané míry jednoduše použít normu, jakožto vzdálenost bodu  $[H; D; D - H]$  od souřadnice efektivního trhu  $[0,5; 1,5; 1]$ , tedy index efektivity

$IE$  definujeme jako  $IE = \sqrt{(\hat{H} - 0.5)^2 + (\hat{D} - 1.5)^2 + \left(\frac{\hat{D} - \hat{H} - 1}{2}\right)^2}$ . Vzdálenost entropické míry od hodnoty 1, tedy od maximální entropie, vážíme jednou polovinou z důvodu jiné šířky oboru hodnot. Pro efektivní trh tedy máme  $IE = 0$ , a čím vyšší je index, tím méně je trh efektivní. Nutno poznamenat, že rozdíl mezi fraktální dimenzí a Hurstovým exponentem používáme jako míru entropie, protože je ohraničená, na rozdíl od standardní entropie, která omezená není.

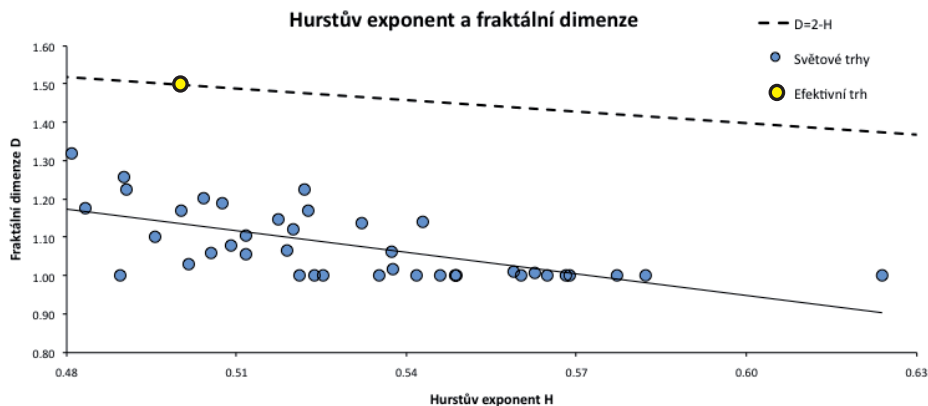
Jako odhad fraktální dimenze použijeme odhad popsany v předešlé podkapitole. Pro odhad Hurstova exponentu použijeme vážený průměr odhadů pro dané metody. Použijeme tedy průměr hodnot pro R/S, DFA, DMA a HHCA, avšak pro DFA a HHCA použijeme i alternativní definice pro větší přesnost odhadu Hurstova exponentu. DFA odhadneme se dvěma typy filtrování, a to lineárním a kvadratickým trendem. HHCA pak aplikujeme ve dvou variantách, a to ve variantě popsané původně Barabasi *et al.* (1991), a v upravené variantě podle Di Matteo *et al.* (2007). Do celkového průměru pak započítáme průměr odhadů pro DFA a průměr odhadů pro HHCA. K takové proceduře přistupuje z důvodu toho, že metody jsou citlivé na odlišné statistické vlastnosti (Weron, 2002, Baruník a Křístoufek, 2010 a Křístoufek, 2010b), a tímto možné odchylky vyhladíme.

## 5. Výsledky

Zkoumáme efektivitu 41 akciových trhů, které jsou popsány v tabulce 1. Tento soubor pokrývá indexy americké, západoevropské, východoevropské, asijské i africké. Databáze byla získána z veřejných stránek [www.dukascopy.com](http://www.dukascopy.com) a obsahuje hodnoty akciových indexů od počátku roku 2000 do konce srpna 2011 (kromě případů, kdy hodnoty indexů začínají až po roce 2000). Zkoumané období tedy obsahuje jak roky stabilního růstu, tak periody dlouhodobých poklesů po splasknutí bubliny okolo internetových firem, tedy „DotCom bubble“, a současnou krizi. V tabulce 2 jsou popsány základní popisné statistiky pro všechny zkoumané indexy a jejich logaritmické „close-close“ výnosy (průměr, minimální a maximální hodnoty, směrodatnou odchylku, šikmost, nadměrnou špičatost a KPSS test pro stacionaritu). Většina indexů je negativně vychýlených a všechny jsou leptokurtické. Stacionaritu zamítáme pouze pro akciový index Srí Lanky (CSE). V případě CSE tedy nebudeme hovořit o dlouhé paměti, ale o škálování rozptylu. Pro testování stacionarity uvádíme pouze výsledky pro KPSS test, s použitím standardního ADF testu zamítáme jednotkový kořen pro všechny indexy.

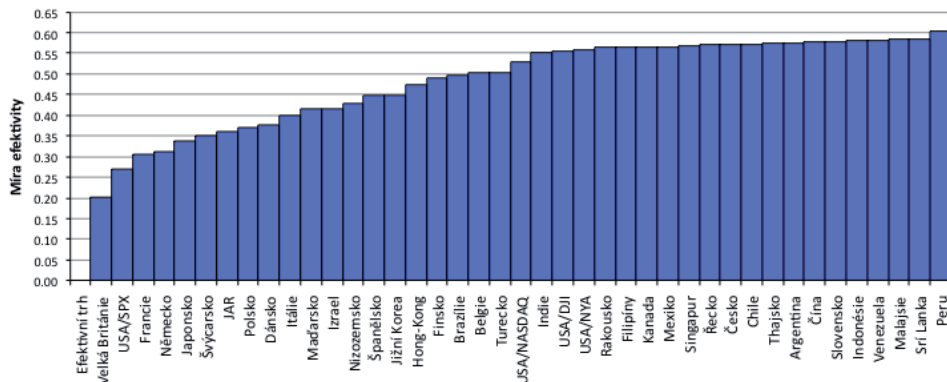
Obrázek 1

Hurstův exponent a fraktální dimenze



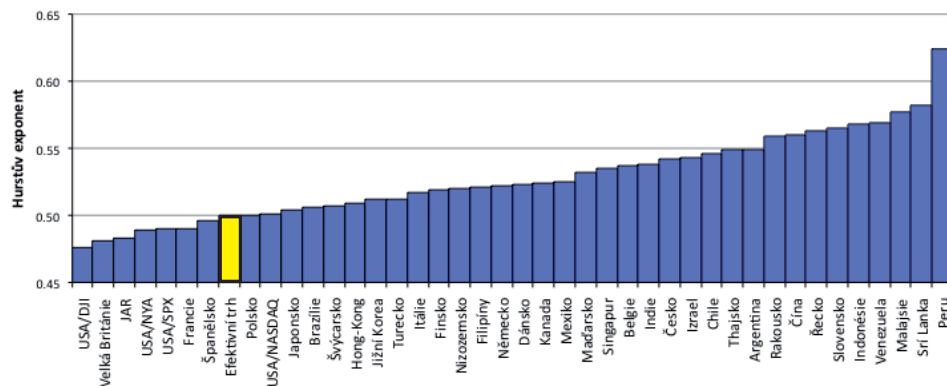
Zaměříme se nyní na konkrétní výsledky. Začneme s výsledky pro fraktální dimenzi a Hurstův exponent. Jak bylo dříve v textu uvedeno, pro sebe-afinní procesy platí  $D = 2 - H$ . Vztah mezi  $H$  a  $D$  je vyobrazen v obrázku 1. Zřetelně pozorujeme, že vztah mezi dvěma hodnotami je záporný, nicméně neodpovídá předpisu pro sebe-afinní procesy. Na druhou stranu tyto dvě míry na sobě nejsou nezávislé. Můžeme tedy tvrdit, že procesy výnosů akciových indexů nejsou sebe-afinní. Zjistíme ale, že přenos mezi lokálními a globálními vlastnostmi v dynamice zde částečně existuje. Tedy lokální paniky či stádní chování se částečně přenáší i do globálních vlastností zkoumaných časových řad. Další implikací je to, že má smysl zkoumat  $D$  a  $H$  odděleně, protože nám každé poskytuje jinou informaci.

Obrázek 2

**Míra efektivity trhu pro jednotlivé akciové indexy**

Celková míra výkonnosti kapitálového trhu je pro jednotlivé akciové trhy popsána v obrázku 2. Jako nejefektivnější trh se ukazuje britský FTSE, který je následován americkým SPX, francouzským CAC, německým DAX a japonským NIKKEI. Jako nejméně efektivním trhem se jeví index Peru (IGRA), následován indexem Srí Lanky (CSE), Malajsie (KLSE), Venezuely (IBC) a Indonésie (JKSE). Nejzajímavějším a nejpřekvapivějším výsledkem jsou hodnoty indexu efektivity pro ostatní indexy z USA. NASD, NYA i DJI se pohybují přibližně v polovině žebříčku. Když se zaměříme na geografickou příslušnost jednotlivých trhů a jejich efektivitu, tak vidíme, že na předních místech se umísťují indexy ze západních rozvinutých ekonomik a na druhém konci naopak indexy hlavně z jižní Ameriky (kromě Brazílie) a Asie. Z pohledu středoevropského regionu můžeme konstatovat, že relativně efektivními trhy jsou polský WIG20 a maďarský BUX, přičemž český PX50 a slovenský SAX zaostávají. Abychom odhalili důvody těchto výsledků, tak se zaměříme na pořadí a výsledky pro jednotlivé míry, tedy  $D$ ,  $H$  a  $D - H$ .

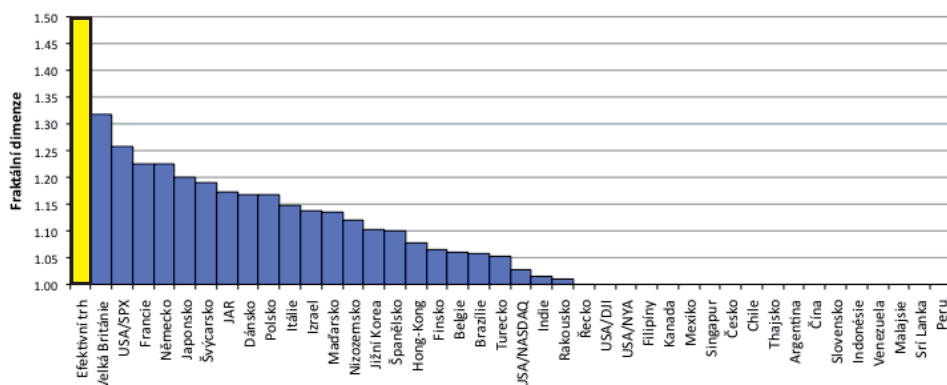
Obrázek 3

**Hurstův exponent pro jednotlivé akciové indexy**

Podle odhadů Hurstova exponentu vidíme, že hlavním důvodem neefektivity amerických indexů není persistence či anti-persistence řad (obrázek 3). Všechny čtyři zkoumané akciové indexy z USA jsou velice blízko hranice  $H = 0,5$ , tedy nekorelované. Tři z indexů (DJI, NYA a SPX) jsou dokonce pod touto hranicí, což ukazuje velmi slabé znaky anti-persistence ( $H = 0,4760$ ,  $H = 0,5016$ ,  $H = 0,4895$  a  $H = 0,4902$  postupně pro DJI, NASD, NYA a SPX). Postupný pokles korelací tedy není důvodem vysokého indexu efektivity pro tyto americké indexy. Velice blízko hodnotě pro efektivní trh jsou indexy Polska ( $H = 0,5003$ ), USA (NASD) a Japonska ( $H = 0,5042$ ). Na opačném chvostu pořadí jsou indexy Peru ( $H = 0,6239$ ), Srí Lanky ( $H = 0,5822$ ), Malajsie ( $H = 0,5772$ ), Venezuely ( $H = 0,5690$ ), Indonésie ( $H = 0,5682$ ) a Slovenska ( $H = 0,5649$ ).

Obrázek 4

#### Fraktální dimenze pro jednotlivé akciové indexy

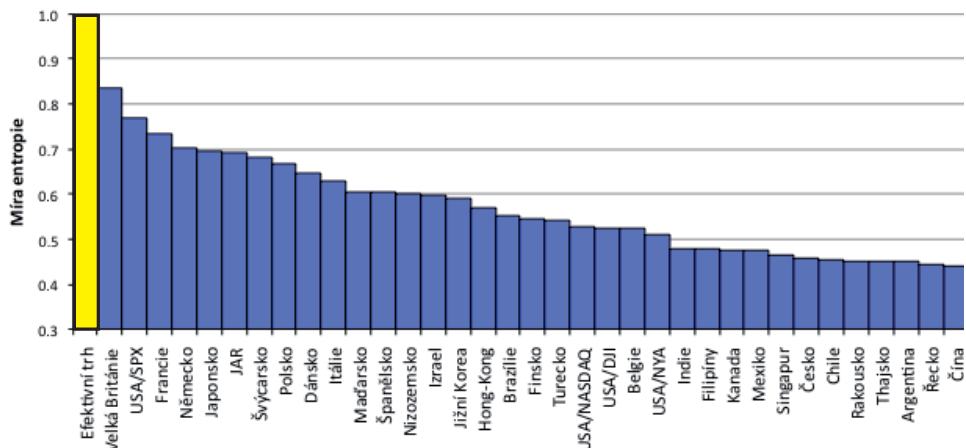


V porovnání s výsledky podle Hurstova exponentu nám dávají odhady fraktální dimenze  $D$  zajímavější informace (obrázek 4). Všechny indexy mají  $D < 1,5$ , tedy mají nižší fraktální dimenzi než zcela náhodný proces. Taková dimenze signalizuje, že na lokální úrovni časové řady často trendují, dochází tedy ke střídání býčích a medvěďích fází, což však odporuje definici efektivního trhu. Jak již bylo naznačeno dříve, tato lokální vlastnost se však přenáší do globálních charakteristik jenom částečně. Nejblíže hodnotě fraktální dimenze pro náhodný proces je opět britský FTSE ( $D = 1,3165$ ), následován americkým SPX ( $D = 1,2578$ ), francouzským DAX ( $D = 1,2252$ ), německým DAX ( $D = 1,2251$ ) a japonským NIKKEI ( $D = 1,1997$ ). Nutno podotknout, že přesto, že jsou tyto hodnoty pro zkoumané akciové indexy nejlepší, jsou stále nezanedbatelně vzdálené od ideální hodnoty  $D = 1,5$ . Co je však zářezující – více jak polovina zkoumaných indexů má hodnotu fraktální dimenze rovnu jedné, tedy jejich odhad byl menší či roven jedné. Takový výsledek signalizuje, že tyto indexy podléhají intenzivnímu stádovému chování. Pokud se opět zaměříme na indexy USA, tak kromě SPX, který je mezi indexy s nejvyšší fraktální dimenzí, má fraktální dimenzi vyšší než jedna pouze NASD, ostatní dva americké indexy mají odhad fraktální dimenze

roven jedné. Většina zkoumaných indexů vykazuje silnou lokální persistenci, a tedy odchylku od efektivního trhu, která se promítla skrze fraktální dimenzi do celkové míry efektivnosti  $IE$ .

Obrázek 5

**Míra entropie pro jednotlivé akciové indexy**



Při srovnání s entropickým indexem, v našem případě tedy rozdílem mezi fraktální dimenzí a Hurstovým exponentem, dostáváme podobné výsledky jako pro samotnou fraktální dimenzi (obrázek 5). Faktem však zůstává, že i index s hodnotou  $D - H$  nejbližší hodnotě pro náhodný proces s maximální entropií, tedy  $D - H = 1$ , je opět britský FTSE s hodnotou 0,8356. Tedy přes to, že je tato hodnota mezi ostatními indexy nejlepší, je od ideálního stavu maximální entropie relativně vzdálená. Britský index je pak následován, obdobně jako pro fraktální dimenzi a celkovou míru efektivnosti, americkým SPX, francouzským CAC, německým DAX a japonským NIKKEI. Na opačném konci, tedy mezi indexy s nejnižší entropií, se vyskytují indexy Indonésie, Venezuely, Malajsie, Srí Lanky a na posledním místě zůstává Peru.

## 6. Shrnutí

V tomto článku jsme se zaměřili na zavedení nové míry pro posouzení efektivity kapitálových trhů. Předpokládali jsme při tom pouze martingálovou definici efektivního trhu. Mohli jsme pak použít známé míry fraktální dimenze, dlouhé paměti a entropie pro sestavení vzdálenosti trhu od efektivního stavu. Pomohl nám k tomu i fakt, že všechny tři míry jsme zvolili tak, aby byly omezené, a tedy i dobře srovnatelné. Takto jsme porovnali 41 akciových trhů napříč kontinenty od počátku roku 2000 do konce srpna 2011.

Dospěli jsme k několika zajímavým výsledkům. Za prvé, zkoumané akciové indexy nejsou sebe-afinními procesy, tedy lokální chování se nepřenáší dokonale do globálních vlastností řad. Neplatí ovšem, že by Hurstův exponent a fraktální dimenze

byly nezávislé, jejich závislost má pouze jinou strukturu, než se předpokládá pro sebe-a-finní procesy. Za druhé, u většiny indexů je odchylka od efektivního trhu dominována lokálními neefektivnostmi, tedy střídáním býčích a medvědích trhů, stádních reakcí na zprávy a podobně. Toto chování se projevuje v míře fraktální dimenze, ale nepřenáší se dostatečně silně do globální dynamiky, tedy Hurstova exponentu. Za třetí, nejefektivnějším trhem ze zkoumaných indexů je britský FTSE následovaný indexy ostatních vyspělých zemí (SPX, CAC, DAX a NIKKEI). Toto „vítězství“ britského indexu je stvrzeno všemi měřítky, která jsme použili, resp. v každém z nich je velmi blízko hranici pro efektivní trh. Za čtvrté, kromě SPX jsou tři další zkoumané americké akciové indexy (DJI, NASD a NYA) výrazně neefektivní v porovnání s ostatními indexy vyspělých ekonomik a skončily uprostřed pořadí. Tento výsledek je způsoben hlavně nízkou fraktální dimenzí těchto indexů, tedy neefektivním chováním na lokální úrovni. Na globální úrovni jsou tyto indexy podle Hurstova exponentu naopak velmi blízko efektivnímu trhu. A naposledy, mezi nejméně efektivní trhy patří ty jihoamerické (Argentina, Venezuela, Chile a Peru), společně s některými asijskými (Malajsie a Srí Lanka) a Slovenskem.

## Literatura

- ALESSIO, E.; CARBONE, A.; CASTELLI, G.; FRAPPIETRO, V. 2002. Second-Order Moving Average and Scaling of Stochastic Time Series. *European Physical Journal B*. 2002, Vol. 27, No. 2, pp. 197–200
- BARABASI, A.; SZEPEFALUSY, P.; VICSEK, T. 1991. Multifractal Spectra of Multi-Affine Functions. *Physica A*. 1991, Vol. 178, pp. 17–28
- BARUNÍK, J.; KRIŠTOUFEK, L. 2010. On Hurst Exponent Estimation under Heavy-Tailed Distributions. *Physica A*. 2010, Vol. 389, pp. 3844–3855
- CAJUEIRO, D.; TABAK, B. 2007. Long-Range Dependence and Multifractality in the Term Structure of LIBOR Interest Rates. *Physica A*. 2007, Vol. 373, pp. 603–617
- CARBONE, A.; CASTELLI, G.; STANLEY, H. E. 2004. Time-Dependent Hurst Exponent in Financial Time Series. *Physica A*. 2004, Vol. 344, pp. 267–271
- COSTA, U.; LYRA, M.; PLASTINO, A.; TSALLIS, C. 1997. Power-Law Sensitivity to Initial Conditions within a Logisticlike Family of Maps: Fractality and Nonextensivity. *Physical Review E*. 1997, Vol. 56, pp. 245–250
- DI MATTEO, T. 2007. Multi-Scaling in Finance. *Quantitative Finance*. 2007, Vol. 7, No. 1, pp. 21–36
- FAMA, E. 1970. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*. 1970, Vol. 25, No. 2, pp. 383–417
- FAMA, E. 1991. Efficient Capital Markets: II. *Journal of Finance*. 1991, Vol. 46, No. 5, pp. 1575–1617.
- GNEITING, T.; SCHLATHER, M. 2004. Stochastic Models that Separate Fractal Dimension and the Hurst Effect. *SIAM Review*. 2004, Vol. 46, No. 2, pp. 269–282
- HURST, E. 1951. Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. *Transactions of American Society of Civil Engineering*. 1951, Vol. 116, pp. 770–808
- KANTELHARDT, J.; ZSCHIEGNER, S.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; HAVLIN, S. BUNDE, A.; STANLEY, H. E. 2002. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series. *Physica A*. 2002, Vol. 316, pp. 87–114

- KRIŠTOUFEK, L. 2010a. Dlouhá paměť a její vývoj ve výnosech burzovního indexu PX v letech 1997–2009. *Politická ekonomie*, 2010, Vol. 58, No. 4, pp. 471–487
- KRIŠTOUFEK, L. 2010b. Rescaled Range Analysis and Detrended Fluctuation Analysis: Finite Sample Properties and Confidence Intervals. *AUCO Czech Economic Review*. 2010, Vol. 4, No. 3, pp. 315–330
- LYRA, M.; TSALLIS, C. 1998. Nonextensivity and Multifractality in Low-Dimensional Dissipative Systems. *Physical Review Letters*. 1998, Vol. 80, pp. 53–56
- MALKIEL, B. 2003. The Efficient Market Hypothesis and Its Critics. *Journal of Economic Perspectives*. 2003, Vol. 17, No. 1, pp. 59–82
- MANDELBROT, B.; van NESS, J. 1968. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*. 1968, Vol. 10, No. 4, pp. 422–437
- PENG, C.; BULDYREV, S.; HAVLIN, S.; SIMONS, M.; STANLEY, H. E.; GOLDBERGER, A. 1994. Mosaic Organization of DNA Nucleotides. *Physical Review E*. 1994, Vol. 49, pp. 1685–1689
- PETERS, E. 1994. *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. John Wiley and Sons, New York, 1994, 315 p. ISBN 0-471-58524-6.
- TSALLIS, C.; PLASTINO, A.; ZHENG, W. 1997. Power-Law Sensitivity to Initial Conditions - New Entropic Representation. *Chaos, Solitons & Fractals*. 1997, Vol. 8, No. 6, pp. 885–891
- VANDEWALLE, N.; AUSLOOS, M.; BOVEROUX, P. 1997. Detrended Fluctuation Analysis of the Foreign Exchange Market. *Econophysics Workshop 1997*. 1997, pp. 36–49
- WERON, R. 2002. Estimating Long-Range Dependence: Finite Sample Properties and Confidence Intervals. *Physica A*. 2002, Vol. 312, pp. 285–299.

## CAPITAL MARKETS EFFICIENCY: FRACTAL DIMENSION, HURST EXPONENT AND ENTROPY

**Ladislav Křištofuk, Miloslav Vošvrda**, Institute of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic, Pod Vodarenskou vezi 4, Prague 8, CZ-182 08, Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences, Charles University in Prague, Opletalova 26, Prague 1, CZ-110 00 (kristouf@utia.cas.cz, vosvrda@utia.cas.cz)

---

### Abstract

In this paper, we introduce a new measure of capital market efficiency. For its construction, we use the approaches of fractal dimension, Hurst exponent and entropy. The method is applied on 41 stock indices from the beginning of 2000 till the end of August 2011 and interesting results are found – the analyzed indices are not self-affine; for the majority of indices, the deviation from the efficient market is dominated by local inefficiencies; and the most efficient capital markets are the stock indices of the most developed countries (FTSE, SPX, NIKKEI and DAX).

### Keywords

capital markets efficiency, fractal dimension, long-range dependence, entropy

### JEL Classification

G14, G15

# Příloha

Tabulka 1 **Akciové indexy**

Zkratka	Index	Země
<b>AEX</b>	Amsterdam Exchange Index	Nizozemsko
<b>ASE</b>	Athens Stock Exchange General Index	Řecko
<b>ATX</b>	Austrian Traded Index	Rakousko
<b>BEL20</b>	Euronext Brussels Index	Belgie
<b>BSE</b>	Bombay Stock Exchange Index	Indie
<b>BUSP</b>	Bovespa Brasil Sao Paulo Stock Exchange Index	Brazílie
<b>BUX</b>	Budapest Stock Exchange Index	Maďarsko
<b>CAC</b>	Euronext Paris Bourse Index	Francie
<b>CSE</b>	Chittagong Stock Exchange Index	Srí Lanka
<b>DAX</b>	Deutscher Aktien Index	Německo
<b>DJI</b>	Dow Jones Industrial Average Index	USA
<b>FTSE</b>	Financial Times Stock Exchange 100 Index	Velká Británie
<b>HEX</b>	OMX Helsinki Index	Finsko
<b>HSI</b>	Hang Seng Index	Hong Kong
<b>IBC</b>	Caracas Stock Exchange Index	Venezuela
<b>IGBM</b>	Madrid Stock Exchange General Index	Španělsko
<b>IGRA</b>	Peru Stock Market Index	Peru
<b>IPC</b>	Indice de Precios y Cotizaciones	Mexiko
<b>IPSA</b>	Santiago Stock Exchange Index	Chile
<b>JKSE</b>	Jakarta Composite Index	Indonésie
<b>JSE</b>	Africa All Share Index	JAR
<b>KFX</b>	Copenhagen Stock Exchange Index	Dánsko
<b>KLSE</b>	Bursa Malaysia Index	Malajsie
<b>KS11</b>	KOSPI Composite Index	Jižní Korea
<b>MERVAL</b>	Mercado de Valores Index	Argentina
<b>MIBTEL</b>	Borsa Italiana Index	Itálie
<b>NASD</b>	NASDAQ Composite Index	USA
<b>NIKKEI</b>	NIKKEI 225 Index	Japonsko
<b>NYA</b>	NYSE Composite Index	USA
<b>PSE</b>	Philippine Stock Exchange Index	Filipíny
<b>PX</b>	Prague Stock Exchange Index	Česko
<b>SAX</b>	Slovakia Stock Exchange Index	Slovensko
<b>SET</b>	Stock Exchange of Thailand Index	Thajsko
<b>SPX</b>	Standard & Poor's 500 Index	USA
<b>SSEC</b>	Shanghai Composite Index	Čína
<b>SSMI</b>	Swiss Market Index	Švýcarsko
<b>STRAITS</b>	Straits Times Index	Singapur
<b>TA100</b>	Tel Aviv 100 Index	Izrael
<b>TSE</b>	Toronto Stock Exchange TSE 300 Index	Kanada
<b>WIG20</b>	Warsaw Stock Exchange WIG 20 Index	Polsko
<b>XU100</b>	Istanbul Stock Exchange National 100 Index	Turecko

Tabulka 2 **Popisné statistiky**

Index	průměr	minimum	maximum	SD	šířkost	špičatost (+3)	KPSS statistika
AEX	-0,0003	-0,0959	0,1003	0,0157	-0,0183	6,1531	0,1084
ASE	-0,0006	-0,1021	0,1343	0,0169	-0,0697	5,0812	0,3531
ATX	0,0002	-0,1025	0,1202	0,0150	-0,3410	8,2241	0,3141
BEL20	-0,0001	-0,0832	0,0933	0,0135	0,0694	6,7098	0,1381
BSE	0,0004	-0,1181	0,1599	0,0170	-0,1630	6,2487	0,1900
BUSP	0,0004	-0,1210	0,1368	0,0193	-0,0641	4,5410	0,1229
BUX	0,0004	-0,1265	0,1318	0,0169	-0,1105	6,3117	0,2860
CAC	-0,0002	-0,0947	0,1060	0,0154	0,0594	5,3189	0,0944
CSE	0,0008	-0,1391	0,1770	0,0152	0,2208	25,7090	1,2088
DAX	-0,0001	-0,0887	0,1080	0,0159	0,0025	4,7729	0,1681
DJI	0,0000	-0,0820	0,1051	0,0126	-0,0089	7,8817	0,0647
FTSE	-0,0001	-0,0927	0,0938	0,0129	-0,1309	6,4856	0,1222
HEX	-0,0003	-0,1441	0,1344	0,0193	-0,1933	5,2159	0,1886
HIS	0,0001	-0,1770	0,1341	0,0166	-0,2283	12,5630	0,1306
IBC	0,0008	-0,2066	0,1453	0,0155	-0,4151	25,8530	0,2665
IGBM	-0,0001	-0,1875	0,1840	0,0153	0,0833	20,5300	0,1272
IGRA	0,0008	-0,1144	0,1282	0,0147	-0,3550	10,3010	0,3896
IPC	0,0005	-0,0727	0,1044	0,0144	0,0515	4,3402	0,1295
IPSA	0,0007	-0,0717	0,1180	0,0108	-0,0140	10,7400	0,1663
JKSE	0,0006	-0,1095	0,0762	0,0150	-0,6570	6,1905	0,3397
JSE	0,0006	-0,0758	0,0683	0,0135	-0,1786	3,2503	0,2009
KFX	0,0002	-0,1172	0,0950	0,0137	-0,2594	5,7183	0,0939
KLSE	0,0002	-0,1122	0,0537	0,0092	-1,1810	15,4970	0,1591
KS11	0,0002	-0,1212	0,1128	0,0174	-0,4309	4,5849	0,1617
MERVAL	0,0006	-0,1295	0,1612	0,0214	-0,1235	5,6617	0,1006
MBTEL	0,0002	-0,0771	0,0683	0,0108	-0,3979	5,7820	0,4301
NASD	-0,0002	-0,1029	0,1116	0,0175	-0,1624	3,9587	0,2958
NIKKEI	-0,0003	-0,1211	0,1324	0,0158	-0,3633	7,3242	0,1252
NYA	0,0002	-0,1023	0,1153	0,0140	-0,4233	10,5210	0,1514
PSE	-0,0001	-0,1860	0,2929	0,0162	1,8252	67,2470	0,2770
PX50	0,0003	-0,1619	0,1236	0,0154	-0,6011	15,4230	0,4121
SAX	0,0007	-0,0882	0,0711	0,0120	-0,0481	6,5294	0,5215
SET	0,0000	-0,2211	0,1058	0,0158	-1,8111	26,2170	0,2975
SPX	-0,0001	-0,0947	0,1096	0,0134	-0,1842	8,1808	0,0958
SSEC	0,0002	-0,1200	0,0903	0,0168	-0,2784	4,7064	0,1461
SSMI	-0,0001	-0,0811	0,1079	0,0127	0,0331	6,2488	0,0918
STRAITS	0,0000	-0,2685	0,1406	0,0137	-2,2597	56,9590	0,1989
TA100	0,0003	-0,0734	0,0978	0,0141	-0,1535	3,2977	0,1157
TSE	0,0001	-0,0979	0,0937	0,0122	-0,6630	8,9915	0,0782
WIG20	0,0004	-0,0886	0,3322	0,0185	2,6452	52,0680	0,1909
XU100	0,0004	-0,1334	0,1749	0,0230	0,0039	4,5896	0,1105