Tomáš Langer*

Abstract

Consumer Optimum and Model of Economic Interpretation in Microeconomics

Consumer choice theory uses continuous utility function, representing the consumer preference relation, as a traditional matter of course. However, there are alternative ways of defining consumer's optimum and proving its existence even without introducing such function. Contrasting both approaches raises question about aspects and limitations of economic interpretation of the mathematical form used in the theory. This article investigates economic interpretation in microeconomics as a relation of mathematical model and economic concepts and, using the example of consumer choice theory, formulates a model of economic interpretation based on the properties of analogical thinking, as defined by contemporary psychological literature. Model provides a framework for identifying risks coupled with economic interpretation of mathematical objects, their properties and relations.

Keywords: consumer's optimum, economic interpretation, ordinal, analogy, relational thinking, mathematics

JEL Classification: A12, B40, D01

Úvod

Ekonomická interpretace je z povahy věci nedílnou součástí používání jakéhokoli ekonomického modelu, tím spíše pokud je model matematizovaný. Historie matematizace ekonomie nám nabízí dva příklady pojetí její role v ekonomii, jeden z jejích počátků, druhý z jejího vrcholu.

V prvním případě je to slavné „pálení matematiky“ v dopise Alfreda Marshalla z roku 1906, ve kterém shrnuje svůj názor na použití matematiky v ekonomii:

„(1) Používej matematiku jako jazykovou zkratku spíše než hnací motor zkoumání. (2) Drž se jí, dokud neskončíš. (3) Přelož ji do angličtiny. (4) Pak ilustruj na důležitých příkladech z reálného života. (5) Spal matematiku. (6) Pokud neuspěješ v bodě čtyři, tak spal i první tři. To poslední jsem dělal často...“ (Groenewegen, 1995, in Weintraub, 2002, s. 22).

Druhým příkladem je pak pohled Gerarda Debreua formulovaný v pěti bodech v jeho příspěvku *Theoretic Models: Mathematical Form and Economic Content* z roku 1986: „Axiomatická teorie nejprve vybere své primitivní koncepty a reprezentuje každý z nich matematickým objektem. Například spotřeba spotřebitele, jeho množina možných spotřeb a jeho preference jsou reprezentovány bodem v komoditním prostoru,

* **Tomáš Langer** (xlant03@vse.cz), Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta financí a účetnictví. Článek je výstupem výzkumného projektu *Implementace metody případové studie a ekonomických her do sekundárního vzdělávání v kontextu rozvoje ekonomického myšlení a zkvalitňování propustnosti s terciárním vzděláváním* financovaného Interní grantovou agenturou VŠE v Praze (reg. č. F1/31/2015), a rovněž je výstupem projektu Fakulty financí a účetnictví VŠE, který je realizován v rámci institucionální podpory VŠE IP100040.

podmnožinou komoditního prostoru a binární relací v této podmnožině. Dále jsou *specifikovány* předpoklady o objektech, které reprezentují tyto primitivní koncepty, a z nich matematicky *odvozeny* důsledky. Ekonomická *interpretace* takto získaných teorémů je posledním krokem analýzy. Podle tohoto schématu má axiomatická teorie matematickou formu, která je zcela separovaná od jejího ekonomického obsahu. Pokud odstraníte ekonomickou interpretaci primitivních konceptů, předpokladů a závěrů modelu, její holá matematická struktura musí zůstat stát.“ (Debreu, 1986, s. 1265, *kurzíva přidána*)

Navzdory tomu, že v prvním případě má být *matematika bez interpretace* zničena a v druhém případě naopak zůstat stát jako nezničitelná kostra, oba pohledy na roli matematiky hovoří o interpretaci jako o nevyhnutelném kroku analýzy. Nesmírně málo péče je ale v literatuře věnováno tomu, jak takovou interpretaci provádět, jaké má náležitosti, jaká úskalí, kdy nás vede pro pochopení ekonomických dějů a kdy spíše zavádí.

Tento text si klade za cíl formulovat model ekonomické interpretace v mikroekonomii, který by v jednotném schématu uspořádal pojmy nezbytné k diskusi ekonomické interpretace a aby z něj plynuly závěry o jejich náležitostech a podstatě rizik s interpretací spojených. V důsledku ukazuje, že porozumění pravidlům interpretace ovlivňuje porozumění ekonomickým modelům jako takovým. Postup, který zvolíme, je induktivní a vychází z příkladu alternativních matematických formulací *hledání optima z teorie spotřebitele*, který právě díky práci s neměřitelnou veličinou užitku velice dobře odhaluje jednotlivé aspekty ekonomické interpretace. Její vymezení je předmětem následující části.

1. Interpretace ekonomických modelů

O ekonomické interpretaci lze mluvit ve dvojím smyslu. Jednak je to interpretace konkrétní ekonomické situace optikou (prizmatem) modelu², jednak je to interpretace matematické struktury modelu jako přiřazení věcného významu, tedy pojmu ekonomické terminologie. Obě tato pojetí interpretace jsou znázorněna na schématu na obrázku 1, který je upraven i pro diskusi alternativních matematických formulací modelu, např. v teorii spotřebitele. Jak vyplývá dále, je to druhé z obou pojetí, které budeme při formulaci modelu ekonomické interpretace sledovat.

Dvojité závorky [...] na obrázku 1 označují jednotlivé domény, mezi kterými při teoretickém uvažování hledáme vztah. Podívejme se blíže na jednotlivé typy vztahů:

Vztah A. Tento vztah je nahlížen jako vztah aplikace, kdy se z obecného modelu stává model aplikovaný na konkrétní situaci (Gibbard a Varian, 1978, s. 667). Hesse uvádí, že „vztah mezi modelem a modelovanou věcí může být všeobecně považován za vztah analogie“ (1967, s. 355). V metodologických statích je pohled na analogičnost vztahu mezi ekonomickým modelem a ekonomickou situací běžný. Mikroekonomické modely jsou považovány za *teoretické případy* (theoretical cases), které jsou přiřazovány ke konkrétním ekonomickým situacím na základě uvažování založeného na případech (case-based reasoning, Gilboa *et al.*, 2014, s. 516–520), či *hodnověrné světy* (credible worlds), z nichž jsou závěry přenášeny na konkrétní situace na základě induktivního odvození (inductive inference, Sugden, 2000, s. 19–20, 23–27). V tomto pohledu není samotný model něco, co může být nepravdivé, nebo obsahovat nerealistické předpoklady. Je to uzavřený svět s matematicky dokázanými závěry a teprve *teoretická hypotéza*

2 Máme na mysli především teoretické modely v mikroekonomii a nikoli modely ekonometrické (srov. Gibbard a Varian, 1978, s. 665, 672).

o přiřaditelnosti modelu ke konkrétní ekonomické situaci je testovatelná (Hausmann, 1992, s. 75–80; Gibbard a Varian, 1978, s. 668).

Obrázek 1 | Ekvivalentní matematické formulace v teorii (B), interpretace ekonomické situace v termínech modelu (A) a ekonomická interpretace alternativních matematických formulací modelu (C, D)

Zdroj: vlastní zpracování

Cílem nyní není v úplnosti prozkoumat bohatou literaturu k tomuto vztahu, protože zde je pojetí indukce při analogickém uvažování dobře zpracováno. Tématem tohoto článku je především vztah C/D a níže navržený model ekonomické interpretace ukazuje, že je užitečné i na tento vztah pohlížet optikou vlastností analogického uvažování.

Vztah B. V následujícím textu se budeme opakovaně přesouvat z jednoho matematického pojetí teorie spotřebitele do druhého, abychom na jejich kontrastu ukázali vlastnosti ekonomické interpretace. Vztah těchto matematických pojetí je autory označován jako *repräsentace*, *korespondence* či *ekvivalence*. Budeme tyto termíny považovat za synonyma. Spojitá funkce užítu jako *repräsentace* preferenčního uspořádání nepřidává, a ani nemůže, do ekonomické podstaty problému nic nového. Její rolí je pomocí arbitrárních reálných čísel zastupovat preferenční uspořádání při aplikaci optimalizačního výpočtu. Přesto se s ohledem na široké využití jejích vlastností při formulaci ekonomických závěrů dostává do ekonomické interpretace optima spotřebitele, aniž by bylo explicitně zřejmé, jaký dopad ono *repräsentování* na ekonomickou interpretaci modelu má, či mít může.

Vztahy C/D. Předmětem naší analýzy bude způsob, jakým se vztahují matematické objekty, jejich vlastnosti a vztahy k modelu vyjádřenému pomocí ekonomické terminologie, ještě dříve, než je samotný model použit pro popis konkrétních situací. Není to tedy konkrétní ekonomická situace, kterou budeme při analýze ekonomické interpretace označovat jako *ekonomickou skutečnost*. Je to pojmová formulace modelu, tedy skutečnost *pojmově uchopená*. Pokud totiž řekneme, že např. Lagrangeův multiplikátor je *stínovou cenou*, nebo podíl parciálních derivací funkce je *mezní mírou substitute*, tak zcela charakteristickým způsobem interpretujeme příslušnou matematickou strukturu, ale zcela jistě se nevyjadřujeme ke konkrétní ekonomické situaci. Přiřazujeme obecné pojmy aplikovatelné na celou třídu konkrétních situací, kdy konkrétní spotřebitel zvažuje subjektivní efekt uvolnění svého rozpočtového omezení, či ochotu nechat se kompenzovat za snížení množství jednoho statku statkem jiným. V tomto smyslu se jedná o ekonomickou skutečnost již pojmově utříděnou, tedy *de facto* součást modelu.

Spojení *ekonomická interpretace* se běžně používá ve smyslu jednoho konkrétního ekonomického významu daného matematického objektu, vlastnosti, vztahu, předpokladu či závěru. Dále však budeme o ekonomické interpretaci mluvit jako o *myslenkové operaci*, jejíž model si bere za vzor analogii.

2. Alternativa ke spojitě funkci užítu v teorii spotřebitele

Při hledání rozdílů v ekonomické interpretaci hledání optima spotřebitele se spojitou funkcí užítu a bez ní je vhodné vyjít z učebnicových textů, protože ty jsou v tomto případě de facto empirickým vzorkem práce s ekonomickou interpretací. Je příznačné, že důvodům pro metodologickou volbu zavedení spojitě funkce užítu je i v pokročilých učebních textech věnována maximálně jedna věta. Ta se většinou omezuje na konstatování, že spojitou funkci užítu zavádíme proto, že budeme moci použít existujících postupů matematické analýzy pro nalezení extrému funkce na daném omezení (Mas-Colell *et al.*, 1995, s. 46; Gravelle a Rees, 2004, s. 17). Pokud se autor učebního textu této možnosti zrekne, což je zřejmě pouze v jediném případě, a to u vydaných přednášek A. Rubinsteina z důvodů „záměrného odvedení studentů od mechanistického přístupu k ekonomii“ (Rubinstein, 2006, s. 53), tak takové metodologické volbě opět charakteristicky věnuje jedinou větu.

Na následujícím příkladu ordientů uvidíme ekvivalentní formulaci optima spotřebitele *bez konstrukce funkce užítu*. Gravelle a Rees však také uvádějí, že „pro účely konstrukce teorie rozhodování spotřebitele je nejen měřitelnost užítu, ale i jeho samotný koncept nepotřebný. [...] můžeme založit teorii výběru na konceptech preference a indiference a *nic jiného není k teorii třeba* než sada indifferenčních křivek (či povrchů) s jejich předpokládanými vlastnostmi“ (Gravelle a Rees, 2004, s. 17). S vědomím, že toto pojetí (zatím) nepatří ke standardnímu výkladu teorie spotřebitele, je níže pojednáno v potřebném detailu, aby bylo možné na něj následně odkazovat při analýze ekonomické interpretace.

Netradiční název *ordient* zavedli autoři Renou a Schlag (2014) jako zkrácení slov „order“ a „gradient“. Ve svém příspěvku převádí problém nalezení optima spotřebitele pouze do roviny preferenčního uspořádání (preference relation,), aniž by použili funkci užítu. Ordient, tedy pořadový gradient, je vektor, který lokálně (v bodě) určuje směr v dostupných spotřebních koších, ve kterém je změna považována spotřebitelem za zlepšení a samozřejmě i implicitně opačný směr vnímaný jako zhoršení. Tento koncept je následně použit pro odvození čistě ordinální varianty maximalizace preferenčního uspořádání na omezené množině a dále věty o implicitní funkci a obálkového teorému. Autoři otevřeně tvrdí, že: „Hlavním sdělením tohoto článku je, že není třeba ukvapeně zavádět funkci užítu, tím méně diferencovatelnou funkci užítu.“ (2014, s. 614) Svou inspiraci připisují vydaným přednáškám A. Rubinsteina, kde je předobraz tohoto konceptu použit zejména z didaktických a interpretačních důvodů (Rubinstein, 2006, s. 53).

Renou a Schlag (2014, s. 615) formálně zavádějí pojmy *směrů* a *ordientů* v tranzitivním a reflexivním preferenčním uspořádání $\succsim$ na otevřené a konvexní množině $X \in \mathbb{R}^n$ následujícím způsobem:

Definice 1. „Směry. Směr d je vektorem v $\mathbb{R}^n$. Směr d je směrem *zlepšení* $\succsim$ v bodě $x_0 \in X$, jestliže existuje $\varepsilon^* > 0$ takové, že pro jakékoli $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, $x_0 + \varepsilon d \in X$ znamená, že $x_0 + \varepsilon d \succ x_0$. Směr d je směrem *zhoršení* $\succsim$ v bodě $x_0 \in X$, jestliže existuje $\varepsilon^* > 0$ takové, že pro jakékoli $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, $x_0 + \varepsilon d \in X$ znamená, že $x_0 + \varepsilon d \prec x_0$.“

Definice 2. „Ordienty. Vektor g v $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je *ordientem zvýšení* $\succcurlyeq$ v bodě $x_0 \in X$, jestliže $d \cdot g > 0$ implikuje, že d je směrem zlepšení $\succcurlyeq$ v bodě x_0 . Vektor g v $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je *ordientem snížení* $\succcurlyeq$ v bodě $x_0 \in X$, jestliže $d \cdot g > 0$ implikuje, že d je směrem zhoršení $\succcurlyeq$ v bodě x_0 .“

Definice ordientu je postavena na skalárním součinu vektorů $d \cdot g$, který je kladný, pokud vektory svírají úhel menší než 90° a záporný pokud svírají úhel větší než 90° . Přesněji řečeno, s ohledem na rovnost $d \cdot g = |d| \cdot |g| \cdot \cos \alpha$, kde $|d|$ a $|g|$ jsou (kladné) délky vektorů a α úhel vektory svíraný, se ke kladnému skalárnímu součinu dostaneme při kladném $\cos \alpha$, což znamená rozmezí úhlů $\langle 0, 90 \rangle$ a $\langle 270, 360 \rangle$ a k zápornému skalárnímu součinu při záporném $\cos \alpha$, což znamená rozmezí úhlů $\langle 90, 270 \rangle$.

Obrázek 2 geometricky shrnuje vztahy mezi vektory, přičemž vektory d_1, d_2 jsou příklady směrů zlepšení $\succcurlyeq$ a vektor d_3 příkladem směrů zhoršení $\succcurlyeq$. Tvar rozhraní mezi množinou bodů preferovaných před x_0 a množinou bodů, před kterou je bod x_0 preferován, je v tento moment arbitrární a jen vychází vstříc klasickým předpokladům z teorie spotřebitele. Povšimněme si zároveň, že ona z učebnicové literatury známá ryze ilustrační šipka udávající směr rostoucích preferencí na indifferenčních křivkách zde dostává naprosto konkrétní matematický význam ordientu g .

Obrázek 2 | Ordient g

Zdroj: upraveno podle Rubinsteina, 2006, s. 53 a Renou a Schlaga, 2014, s. 615

Rubinstein označuje svoji ranější verzi ordientu vymezenou pouze pro monotónní, spojitě a konvexně preferované jako vektor *subjektivních hodnot* statků, resp. *lokální ceny*, a preference, pro které lze v každém bodě definovat takový vektor, označuje jako *diferencovatelné preference* (2006, s. 53).

Renou a Schlag interpretují ordient jako *mezni míru substituce*, tedy interpretují podle toho, co znamená podíl jednotlivých koordinát vektoru g . Třída preferencí, na nichž lze definovat ordienty, je širší, než těch, na kterých lze definovat diferencovatelné preference. I prototypický příklad lexikografických preferencí statku x_1 má v každém bodě ordient $g = (1, 0)$, přestože neexistuje spojitá reprezentace takových preferencí. (Renou a Schlag, 2014, s. 616)

Podíváme-li se ale podrobněji na interpretaci ordientu, zjistíme, že příslušný substituční poměr v bodě x_0 je zřejmější spíše z koordinát vektorů *kolmých* na g . Vezmeme-li

za příklad ordient $g(x_0) = (1, 2)$ z obrázku 2, kolmé vektory $g_{2,1}(-2,1)$, resp. $g_{2,1}(2, -1)$, jsou již *přímo vektory množství statků*, které je spotřebitel ochoten mezi sebou směnít bez dopadu na preferovanost koše po směně, a to včetně zohlednění znamének, bude-li směřovat x_2 za x_1 , resp. x_1 za x_2 . S ohledem na výše uvedené úhlové vymezení směrů zlepšení a směrů zhoršení je zřejmé, že kolmé směry jsou „indiferenční“, byť pouze v bodě.

Renou a Schlag dále formalizují ekvivalenci ordientu preferenčního uspořádání $\succsim$ a gradientu funkce, která toto uspořádání *reprezentuje* (2014, s. 617–618). Pokud bude funkce (užitku) f v bodě x_0 diferencovatelná s nenulovými derivacemi, tak gradient $\nabla f(x_0)$ se bude rovnat ordientu $g(x_0)$ preferenčního uspořádání $\succsim$. Autoři, ale upozorňují na konceptuální odlišnost obou přístupů, která je dobře patrná v bodech extrémů funkcí, kde gradient může být považován za nejlepší lineární aproximaci funkce v bodě, ale ordient bude stále vymezovat směry zhoršení, resp. zlepšení z bodu maxima, resp. minima.

Optimum spotřebitele je podle jednodušší formulace Rubinsteina vymezeno následujícím způsobem: „Jestliže je $\succsim$ monotónické, konvexní a diferencovatelné [tedy v každém bodě existuje ordient $v(x)$] a jestliže v bodě x^* platí (i) $px^* = w$, (ii) a pro všechny k taková, že $x_k^* > 0$, a pro kteroukoli komoditu j pak $v_k(x^*)/p_k \geq v_j(x^*)/p_j$, tak x^* je řešením problému spotřebitele [příčemž p je vektorem cen, w rozpočtové omezení a x^* bodem množiny dostupných spotřebních možností]“ (2006, s. 60). Tato formulace koresponduje s klasickou podmínkou optima, kdy poměr mezních užitků a cen má být pro všechny komodity v optimu stejný.³

Závěrem dodejme, že stejně jako lze pomocí ordientů alternativně formulovat podmínku optima spotřebitele i bez spojitě funkce užitku, lze bez ní dokázat i jeho samotnou existenci. Takový postup vycházející pouze z preferenčního uspořádání $\succsim$ prezentuje ve své technické analýze Border (2011, s. 7–8). Pro každý *dosažitelný* bod x_0 v množině spotřebních košů X v rámci rozpočtového omezení lze za platnosti standardních předpokladů o chování spotřebitele *úplnosti srovnání, reflexivity, tranzitivity, spojitosti, nepřesycenosti a konvexity* (Debreu, 1971; Gravelle a Rees, 2004; Soukup, 2012) nalézt uzavřené podmnožiny bodů $x \in X : x \succsim x_0$ a $x \in X : x \preccurlyeq x_0$. První z těchto podmnožin vytváří při zmenšujícím se průměru posloupnost vnořených podmnožin, která má podle *Cantorovy věty o průniku* (Thomson *et al.*, 2008, s. 165) v kompaktním prostoru průnik v *jediném* bodě. To je bod optima, protože je preferovaný před každým uvažovaným bodem $x \in X$. Ekvivalentně vychází ze stejné výchozí podmínky uzavřenosti obou zmíněných podmnožin i Debreu při důkazu existence spojitě funkce užitku (1971, s. 56).

3. Základní požadavky na model ekonomické interpretace

Za nejužší pojetí ekonomické interpretace můžeme považovat případ, kdy řešíme pouze interpretaci předpokladů a závěrů modelu. Například formulace „preference diverzifikované skladby spotřebního koše“ (Mas-Colell *et al.*, 1995, s. 44) či „preference průměru před extrémů“ (Soukup, 2012) je interpretací matematické *konvexity*. V oblasti závěrů je pak *existence extrému funkce* interpretována jako „existence optimálního spotřebního koše“. Tomuto pojetí by odpovídaly i obě citace A. Marshalla a G. Debreua uvedené v úvodu.

3 Renou a Schlag (2014, s. 621–622) poskytují obecnější formulaci pro širší třídu preferencí, pro kterou odkazujeme čtenáře s ohledem na dostupný prostor ke zdroji.

Praxe práce s ekonomickými modely nejen v teorii spotřebitele nám ale ukazuje, že tomu tak obvykle není. Interpretovány jsou běžně i geometrické postupy, dílčí vlastnosti matematických objektů, jejich vztahy i ony samy. To není pouze záležitost předpokladů a závěrů, to je záležitost vnitřní struktury používané matematiky. Jak jinak se dívat na interpretace tečen křivek, poměrů derivací funkcí, parametrů výpočtu jako jsou Lagrangeovy multiplikátory, složek vektorů a vlastností binárních relací?

Než navrhneme model ekonomické interpretace, je třeba formou protipříkladů⁴ vyvrátit dvě intuitivní představy, z čehož nám vyplynou základní požadavky kladené na model:

- matematická ekvivalence obecně znamená i stejnou ekonomickou interpretaci, (tedy vyvrátit představu, že vztah ekvivalence B na obrázku 1 implikuje i ekvivalenci vztahů C a D),
- matematické objekty, jejich vlastnosti a vztahy se obecně interpretují v úplnosti, (tedy vyvrátit představu, že vztahy C a D mají charakter zobrazení z matematické formulace do formulace pojmové).

Následující tři příklady vyvrací první z tezí. Zároveň se postupně liší v tom, co ukazují jako matematické ekvivalenty.

Příklad 1. Pro ilustraci začneme se snad nejjednodušším možným příkladem z oblasti geometrie: konstantou π ve vztahu obvodu a průměru kružnice. Matematická ekvivalence

těchto dvou zápisů je zřejmá: $O = \pi d$ a $\frac{O}{d} = \pi$. Nicméně interpretace prvního nám říká,

že u každé kružnice je obvod π násobek průměru, kdežto druhý, že všechny kružnice mají konstantní poměr obvodu a průměru. To jsou ovšem dva různé postřehy, protože v prvním případě se jedná o návrh postupu, jak z jednoho spočítat druhé, kdežto v druhém případě se jedná o upozornění na jednotící vlastnost množiny různě velkých objektů. Jakkoli se jedná o matematicky ekvivalentní zápisy, tak naše porozumění kružnicím se oběma postřehy rozvíjí. Stejným způsobem lze pohlížet na klasickou podmínku optima

spotřebitele v podobě $\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y}$ a její ekvivalent $\frac{P_y}{P_x} = \frac{MU_y}{MU_x}$, protože obě formulace

nás upozorňují na trochu jiný aspekt optima v podobě mezního užitku z poslední koruny vynaložené na nákup statků v prvním případě a rovnost mezních měr substituce ve směně a spotřebě v případě druhém.

Příklad 2. Ve výše uvedené variantě dokázání existence jedinečného optima spotřebitele na rozpočtem omezené množině s uspořádanými preferencemi pracujeme de facto s ekvivalentem indifferenční křivky, totiž s podmnožinou $x \in X : x \sim x_0$ uzavírající podmnožiny bodů preferovaných před x_0 a těch, před kterými je x_0 preferováno. Nijak však nehypotetizujeme existenci (a tím méně tvar) této indifferenční podmnožiny mimo aktuální rozpočtové omezení spotřebitele. Tento přístup tedy striktně pracuje s preferencemi, které mohou být reálně spotřebitelem projeveny, protože mimo rozpočtové omezení nelze povědět o preferencích vůbec nic – není tam matematický objekt (funkce), který by bylo možné interpretovat jako preferované spotřební koše. Oproti tomu varianta se spojitou funkcí užitku nám

4 Termín *protipříklad* užíváme ve smyslu T. S. Kuhna (1997, s. 85–97), pro kterého znamená případ, který vyvrací ustavené pravidlo či teorii (angl. *couterinstance*).

definuje uspořádání preferencí nezávislé na aktuálním rozpočtovém omezení, které v těchto samostatně existujících preferencích – reprezentovaných kvazikonkávní funkcí užítku – pouze vytíná maximální dostupnou indifferenční křivku. Taková představa o spotřebiteli tvrdí, že zná své preference bez ohledu na skutečnou výši rozpočtu.

Příklad 3. Tento příklad ukazuje pro naše závěry zásadní rozdíl mezi ekonomickou interpretací gradientu funkce užítku a ordientu $\geq$. Jak jsme viděli výše, za daných podmínek jsou tyto vektory v daném bodě stejné a poměry jejich koordinát vyjadřují to samé, totiž mezní míru substituce. Nicméně gradient obsahuje jako koordináty parciální derivace funkce užítku v daném bodě, tedy *kardinální přírůstky veličiny užítku*, kdežto ordient jako koordináty obsahuje prostě *množství statků*. To je velice dobře vidět na obrázku 2 právě z „indiferenčních“ vektorů kolmých na ordient, které ukazují přímo směnnou kombinaci množství statků včetně znamének. To je z hlediska představy o spotřebiteli naprosto zásadní rozdíl.

Na příkladech 2 a 3 vidíme, že obě matematicky ekvivalentní formulace se liší něčím, co bychom mohli pracovně nazvat *ontologií modelu*. Tedy tím, co v něm je a co v něm není, což má důsledky pro ekonomickou interpretaci. Je to právě tato ontologie modelu, která je výchozím bodem každého interpretačního úsilí.

Přjděme k druhé tezi o možnosti zcela interpretovat matematické objekty modelu. Standardní příběh o používání modelů v ekonomii říká, že nutně zjednodušují skutečnost tím, že její (pro analýzu nepodstatnou) část abstrahují, v čemž ale právě spočívá jejich užitečnost, protože teprve skrze model se skutečnost pro nás stává uchopitelnou. O abstrakci se tedy mluví výhradně na straně ekonomické skutečnosti a jednotlivé části modelu mají odpovídat vybraným prvkům skutečnosti a jejich zohledněným vlastnostem, zbytek je abstrahován.

Příklad 4. Rozpočtové omezení spotřebitele zapsané jako $p_X X + p_Y Y$ má úplnou ekonomickou interpretaci: p jsou ceny, X a Y množství statků a B velikost rozpočtového omezení. Pokud ovšem o rozpočtovém omezení začneme mluvit v termínech *vektoru cen*, *vektoru množství statků* a jejich *skalárnímu součinu*, který musí být menší než rozpočet spotřebitele, pak začínáme používat matematické představy, které mají neinterpretovatelné vlastnosti. Čemu v doméně ekonomické například odpovídá jedna definiční vlastnost vektoru cen, totiž jeho směr ve vektorovém prostoru? Ne všechny vlastnosti konstrukce skalárního součinu dvou vektorů jsou zjevně předmětem interpretace. Navíc je zřejmé, že oba způsoby zápisu rozpočtového omezení jsou matematicky ekvivalentní.

Model ekonomické interpretace bude tedy muset obsáhnout zjevnou potřebu abstrahovat i na straně matematické domény, protože přechod mezi ekvivalentními matematickými formulacemi může znamenat, že nebude možné interpretovat část vnitřní struktury použité matematiky.

4. Model ekonomické interpretace jako analogie

Současné porozumění analogickému myšlení významně přesahuje klasické vymezení analogie jako situace sobě odpovídajících vztahů, kdy druhé se má k prvnímu jako čtvrté ke třetímu (Aristoteles, 1996, s. 98). Ze soudobé literatury psychologie uveďme nejprve několik hlavních tezí o myšlenkových procesech na pozadí naší schopnosti dosahovat znalostí na základě analogie. Přehledová kapitola *Analogy and Relational Reasoning* (Holyoak, 2012, s. 234–259), shrnující empirické výzkumy analogického myšlení v posledních desetiletích, uvádí čtyři hlavní komponenty analogického myšlení. Schéma

na obrázku 3 ukazuje jejich vzájemné vztahy. Analogické myšlení vždy pracuje se dvěma doménami znalostí, zdrojovou a cílovou, mezi nimiž dochází k interakci. O doménách se běžně mluví jako o vzájemných analogiích (též *analogonech*).

Obrázek 3 | Hlavní komponenty analogického uvažování

Zdroj: Holyoak, 2013, s. 236

Těmito komponentami jsou (Holyoak, 2012, s. 244–250):

1. *Získání (Retrieval)* – je identifikace vhodného zdrojového analogu pro cílovou situaci. Je obecně nejnáročnější částí analogického uvažování, protože možnosti dostupné v dlouhodobé paměti jsou zcela otevřené a cokoli v ní může být relevantní.
2. *Přřazení (Mapping)* – je identifikace odpovídajících si elementů ve zdrojové a cílové doméně. Ta může být založena na třech omezeních: (i) na pozorovatelných vlastnostech analogů, (ii) na struktuře, tedy rolích, které jednotlivé elementy analogů vůči sobě hrají, či (iii) na stejném účelu pro analogizujícího člověka. O provázanosti všech komponent svědčí, že podnětem pro získání konkrétního analogu ve fázi *získání* se může stát kterýkoli ze tří aspektů podobnosti. U dobré analogie se výsledná sada přiřazených elementů podřizuje všem třem omezením najednou. Elementy po fázi *přřazení* typicky spadají do jedné ze tří kategorií: (i) přiřaditelné podobnosti, (ii) přiřaditelné rozdíly a (iii) nepřidatelné rozdíly.⁵ Druhá a třetí kategorie jsou ty aspekty *obou* domén, které analogie buď *abstrahuje*, nebo se stanou základem pro *přenesení* ze zdroje na cíl.
3. *Přenesení (Transfer, Inference)* – je použití zdrojového analogu pro formulaci nových tvrzení (odvození) o cílovém analogu. Tato komponenta je smyslem použití analogie: výběr zdroje a jeho přiřazení má smysl pouze pokud chceme na základě zdroje něco tvrdit, resp. se něco dozvědět, o cíli analogie. Platnost takového tvrzení (odvození) je dána *mírou* korespondence mezi oběma doménami získané během *přřazení*, ale zároveň je vždy spekulativní – zdroj zde hraje vůči cíli roli modelu, který je vždy

5 Toto rozlišení odpovídá dělení M. Hesse na pozitivní analogii, negativní analogii a neutrální analogii (2000, s. 299–300). Dle autorky jsou to právě neutrální aspekty analogie (často zatím nepřidatelné rozdíly), které jsou základem získávání znalostí při plodném přenášení mezi modelem a modelovanou skutečností a ustavování dalších přiřaditelných pozitivních analogií.

relevantní jen do určité míry. S ohledem na to, že zdrojová i cílová doména si jsou analogy *navzájem*, je přenos (formulace odvození) v principu obousměrná záležitost. Rozlišení na zdroj a cíl je dáno účelem – jedno chceme vysvětlit v termínech druhého, ale *obecně* to neimplikuje směr přiřazení a přenosu (což je důležité doplnění k šípkám na obrázku 3). V rámci přenesení jsou vybrané nepřijímané elementy ze zdrojové domény přenosu *konstituovány* v cílové doméně přenosu.⁶ (V terminologii modelování analogických myšlenkových procesů se tomuto kroku říká „copy with substitution and generation“, CWSG.)

4. *Učení (Learning)* – je ustavení tzv. *relačního zobecnění*, které slouží jako schéma pro interpretaci dalších domén analogických k použitému zdroji a cíli. *Schémat* tedy explikují (zobecňují) podobnosti mezi zdrojem a cílem tak, že tyto mohou být přeneseny i do dalších oblastí.

S ohledem na teorii spotřebitele se podíváme nejprve na její interpretaci optikou těchto čtyř komponent analogického uvažování. Začneme první a poslední komponentou, které mají velice podobnou interpretaci. *Získání* analogu je dáno matematickým modelem. Ve fázi *interpretace modelu* se již nezabýváme alternativami a analog je nám dán. To je samozřejmě jiná situace než ve fázi *formulace modelu*, kde výběr matematických objektů a aspekty jejich podobnosti k modelované skutečnosti hrají zásadní roli, jak dokládá výše uvedená citace Debreua (1986, s. 1265). *Učením* odvozujeme schéma, což je opět náš matematický model, pokud je použitelný na větší množství situací. To je pro použití schématu *maximalizace funkce na daném omezení* v ekonomii typické, neboť slouží pro popis i dalších ekonomických problémů, které jsou v ten moment vnímány jako analogické.

Na tomto základě již můžeme graficky formulovat druhý model ekonomické interpretace a v jeho rámci ukázat komponenty *přiřazení*, *abstrahování* a *přenosu*.

Obrázek 4 | Model ekonomické interpretace jako analogie

Zdroj: vlastní zpracování

⁶ Tento proces přenesení je právě induktivní inferencí podle Sugdena (2000, s. 19–20, 23–27).

Obrázek 4 ukazuje, že ekonomickou interpretací objektů v matematické doméně (množin a jejich vlastností, funkcí a jejich vlastností, koeficientů, derivací apod.) jsou pojmy, jejich vlastnosti a vztahy v doméně ekonomické, přičemž podstatou modelu je zjednodušení, tedy i abstrakce od některých ekonomických skutečností. Přiřazení prvků domény matematického modelu do ekonomické domény je právě *konkrétní ekonomickou interpretací*. Sytý objekt matematické domény přiřazený sytému objektu domény ekonomické může tedy například být *množinou* přiřazenou výčtu *spotřebních košů* (mapování objektu), nebo *omezenost* této množiny přiřazená *rozpočtu* spotřebitele (mapování vlastnosti). Abstrahované aspekty ekonomické domény, znázorněné jako šrafované objekty, mohou být například *počtem* analyzovaných statků (v modelu typicky jen dva), nebo uvažováním *tvorby úspor* jako součástí preferencí spotřebitele (typicky nemodelováno). Schéma na obrázku 4 dále obsahuje nepřijížené či nepřenesené šrafované objekty na straně matematické domény, tedy *abstrahované* matematické objekty, jejich vlastnosti či vztahy, které nemají ekonomickou interpretaci a mají být při použití modelu potlačeny.

Příklad 5. V teorii spotřebitele je de facto abstrahována *funkční hodnota* funkce užitku a též její *spojitost*. Pokud budeme trvat na ordinalitě preferencí, tak obě tyto (definiční) vlastnosti funkce užitku nemají ekonomickou interpretaci a jsou ve *výsledku* při interpretaci abstrahovány. Při zavádění funkce užitku je zdůrazňována její nejedinečnost, protože každá pozitivně monotónická transformace funkce $U(x)$ reprezentuje pořadí $\geq$ stejně dobře (Gravelle & Rees, 2004, s. 18). Při diskusi takových transformací si ale povšimněme, že ordinalita jako *neurčitelnost* míry preference, tedy nemožnost reprezentovat „vzdálenost“ indifferenčních množin určitou hodnotou, je nahrazována ordinalitou jako *irelevancí* existující vzdálenosti hodnot reprezentujících indifferenční množiny. Jakkoli je diskuse monotónické transformace klíčová pro korektní vymezení vlastností funkce užitku, tak poněkud zakrývá právě ten prostý fakt, že přestože volíme reálná čísla jako reprezentaci jednotlivých indifferenčních množin, jsou to právě tato čísla, která jsou ve výsledku při interpretaci abstrahována. Z funkční hodnoty funkce užitku odmýšlíme celou její podstatu reálného čísla s výjimkou její *srovnatelnosti*, a tedy seřaditelnosti spotřebních košů, které reprezentuje. Funkční hodnota je abstrahována z modelu, protože by její interpretace způsobila nekonzistenci (nerealističnost) v ekonomické doméně v podobě existence kvantifikovatelného užitku. U spojitosti, se kterou tato diskuse úzce souvisí, je situace obdobná, byť je její abstrahování pouze částečné. Mas-Colell *et al.* označují spojitost bez dalšího vysvětlení jako *kardinální* vlastnost funkce užitku (1995, s. 50), což lze zřejmě přiblížit následujícím způsobem. Předpoklad *spojitosti* spotřebitele chování se totiž omezuje na možnost kompenzace úbytku limitně nekonečně malého množství jednoho statku konečným množstvím statku druhého, tedy *pouze na vrstevnici* funkce užitku. Na ose funkční hodnoty je ale ordinální funkce z principu nespojitá, protože každá monotónická transformace – pokud použijeme vizuální příměr pro situaci se dvěma statky – od sebe jednotlivé vrstevnice vždy vertikálně „roztřhne“ do nových vzdáleností.

Dále schéma na obrázku 4 obsahuje rozlišení interpretovaných objektů na *přiřazené na přenesené*. Následující příklady ukazují, že v momentu, kdy chceme interpretovat nejen předpoklady a závěry, nýbrž i samotné matematické objekty, jejich vlastnosti a vztahy, snadno narazíme na interpretační meze dané *povahou* ekonomické domény.

Příklad 6. Celou kardinální verzi teorie užitku můžeme optikou modelu vidět jako *nekontrolovaný přenos* objektů z matematické do ekonomické domény bez zohlednění

její povahy (neměřitelnosti užítu). Charakteristicky vzniká prvoplánová identita vztahů mezi matematickými objekty a vztahů mezi pojmy v „ekonomické interpretaci“. Spojení „klesající mezní užitek“ není ani tak ekonomickou interpretací, jako spíše doslovným překladem „průběhu parciální derivace funkce (užitku)“. Zjednodušeně můžeme říci, že jestliže zavedenou funkční reprezentaci $\geq$ při interpretaci *přenášíme*, získáme kardinální verzi teorie užítu, jestliže ji při interpretaci *abstrahujeme*, získáme verzi ordinální.

Hlavním rizikem při interpretaci reprezentujících matematických objektů je snaha o *přenos* jich samotných, či jejich vlastností a vztahů, v momentech, kdy bychom s ohledem na konzistenci ekonomické domény měli volit spíše jejich *abstrahování*, které je legitimní součástí analogického uvažování, a to na *obou* jeho doménových stranách. Další příklady ukazují, že problém při přenosu může mít i subtilnější charakter.

Příklad 7. Můžeme si být dobře vědomi neměřitelnosti užítu, nicméně ze samotného faktu, že v modelu *existuje* funkční hodnota funkce užítu, která slouží být jen k určování pořadí jednotlivých bodů na kompaktní množině, můžeme formou přenosu snadno dospět k závěru, že spotřebitel *musí* „podle něčeho“ určovat preferenci jedněch spotřebních košů před jinými. V teorii spotřebitele je ale jeho schopnost deklarovat své preference primitivním elementem a má se za to, že je toho prostě schopen i bez čehokoli dalšího (Gravelle a Rees, 2004, s. 10). V tomto je právě nebezpečí dané *ontologií* modelu, protože přenos funguje na bázi *kopírování a vytváření* entit, vlastností a vztahů (CWSG).

Představa, že spotřebitel preferuje „podle něčeho“, co by mělo být součástí modelu, je velice silná, jak ukazuje další příklad.

Příklad 8. Již zmíněná Rubinsteinova interpretace jeho verze ordientu jako „lokálních cen“, resp. „subjektivních hodnot“ (2006, s. 53), jasně směřuje k myšlence substitute, resp. její mezní míry. V prvním případě „lokálních cen“ jde o zřejmou analogii k cenám, kterým čelí spotřebitel v podobě sklonu svého rozpočtového omezení. Pokud je na ceny pohlíženo jako na vektor, tak takový vektor tvoří normálu k rozpočtovému omezení. Ordient je normálou ke konvexní indifferenční množině v daném bodě, tedy vektorem kolmým na tečnu v daném bodě, tedy kolmým k „lokální verzi“ rozpočtového omezení. Podle takových „lokálních cen“ pak dochází k substituci. Ve druhém případě „subjektivních hodnot“ jde principálně o to samé, jen s vědomím, že žádné lokální ceny nemáme, takže jestliže je spotřebitel ochoten substituovat v určitém poměru, tak připisuje jednotlivým statkům určité vlastní hodnoty, jejichž poměr určuje i substituci, což jsme ale zpátky u kardinálního mezního užítu. Rubinstein tyto interpretace nabízí vědomě v uvozovkách, tedy ze zřejmých důvodů jen jako pedagogické přiblížení *účelu*, který takový vektor má, tedy vymezení substitute. Skryté ale s sebou takové přiblížení nese ideu preference „podle něčeho“. Samotná velikost koordinát ordientu ale nemá faktickou ekonomickou interpretaci a je tedy na straně matematické domény abstrahována. Interpretaci má pouze jeho směr jako lokální směr nejrychlejšího zvyšování preferencí.

Příklad 9. V případě ordientů je interpretační situace o to zajímavější, že ordient je definiční kotvou pro vymezení dalších vektorů – směrů zlepšení, zhoršení i *mezní míry substitute*. Číselná velikost koordinát musí být u vektorů zlepšení a zhoršení abstrahována a je zachován pouze jejich směr. To je problém *korespondující* s nejedinečností funkce užítu a její pozitivně monotónickou transformací. Jak jsme již odvodili výše, to není případ „substitučního vektoru“ kolmého na ordient, kde mají koordináty přímý význam indifferenčního směnného poměru, ale pro změnu abstrahujeme směr, protože intuitivně je na konvexních preferencích směrem zhoršení, byť samozřejmě nikoli podle

definice 1. Jakkoli Renou a Schlag (2014, s. 616) žádnou širší diskusi možné interpretace ordientu neuvádějí, svým úzkým zaměřením na interpretaci ordientu jako mezní míru substituce tyto interpretační specifika jejich konceptu zjevně respektují.

Závěr

Matematické formulace lze převádět do korespondujících ekvivalentních forem, které mají ale odlišný potenciál k tomu být smyslně interpretovány v ekonomické doméně.

Ekonomická interpretace s sebou podle navrženého modelu nese potřebu stavět se k matematice použité v modelu jako k *analogické* pojmově uchopené ekonomické skutečnosti. To v sobě nezahrnuje pouze klasické vymezení analogie, která je popsána jako situace odpovídajících si vztahů. Zahrnuje to i potřebu zabývat se odlišnostmi obou analogických domén, rozhodovat, kde si mohou být přiřazeny a kde jsou naopak rozdíly, které je třeba mít na zřeteli.

Je-li zde analogické uvažování považováno za model ekonomické interpretace, tak tím neříkáme nic jiného, než že je k němu ekonomická interpretace *analogická*. Vymezení modelu a navazující příklady ukázaly, že interpretaci matematické formulace teorie spotřebitele lze plodně *interpretovat* pomocí komponent analogického uvažování. Každý z uvedených příkladů tedy slouží jako jedno specifické přiřazení, které zvyšuje hodnověrnost pohledu na ekonomickou interpretaci jako na analogii. Jestliže jsme takto při získání samotné analogie jako modelu ekonomické interpretace provedli *přiřazení*, pak důležitou otázkou je, v čem spočívá *přenos a učení* dané tímto modelem ekonomické interpretace. Tedy, co můžeme získat nahlížením na ekonomickou interpretaci jako na analogii.

Učení jako identifikace obecnějšího schématu znamená způsobilost tohoto modelu být modelem ekonomické interpretace i pro další části mikroekonomické teorie za hranicí hledání optima spotřebitele. V ještě obecnější rovině pak případně i modelem interpretace matematiky aplikované v ekonomii. V případě *přenosu* je odpověď na tuto otázku dána praktickou možností mluvit o konkrétních ekonomických interpretacích pomocí terminologie ustavené tímto modelem; získáváme tedy nadhled nad procesem, jímž svazujeme konkrétní matematické objekty s konkrétními ekonomickými významy. Tento proces se pro nás stává kontrolovatelným a jsme schopni identifikovat rizika, která s sebou použití konkrétní matematiky nese.

Tyto praktické závěry lze shrnout následujícím způsobem:

- Nové matematicky ekvivalentní formulace modelu *vždy* vyžadují opětovné zvážení interpretace použitých objektů, jejich vlastností a vztahů. Jejich ekvivalence neznamená stejnost ekonomické interpretace.
- Pohled na matematiku v ekonomickém modelu jako na analogii k ekonomické skutečnosti znamená, že při interpretaci poměrujeme dvě představy proti sobě a rozhodujeme se, v kterém ohledu si odpovídají a v kterém nikoli. Vlastní představu o vlastnostech modelované ekonomické skutečnosti tedy nemůžeme nemít a v tomto smyslu je interpretace daná *interakcí* mezi matematickými objekty a ekonomickými koncepty.⁷ (Viděli jsme, že pro diskusi mezi ekonomické interpretace spojitě funkce

7 Pojetí tvůrčí interakce mezi myšlenkovými doménami zavedl M. Black ve své přelomové analýze metafor, na kterou navázal analýzou škálových, analogických a teoretických modelů (srov. Black, 1962, s. 38–44, 220–229).

užitku a ordientů byly určující předpoklady o konsistenci pohledu na rozhodování spotřebitele v podobě (i) neurčitelnosti míry preference, tedy neměřitelnosti užítu, a (ii) schopnosti spotřebitele preferenci deklarovat jako primitivním prvku teorie. Idea interakce přesně demonstruje *obousměrnost* analogie, kdy je rozlišení na zdroj a cíl dáno pouze účelem, ale k abstrakcím dochází na obou stranách tak, aby si zbývající části *obou* analogů dostatečně odpovídaly.)

- Není třeba usilovat o úplnou interpretaci celé vnitřní struktury matematiky použité v modelu. Analog nikdy zcela neodpovídá cílové doméně a abstrakce je legitimní součástí analogického uvažování. Je však vhodné explicitně upozornit uživatele modelu, kde jsou interpretační meze použité matematiky. (Povšimněme si, že stejně jako spojitá funkce užítu není ani ordient ničím jiným než *reprezentací* preferenčního uspořádání v daném bodě. Matematický objekt vektoru, má také určité vlastnosti *neinterpretovatelné*, jakkoli je „blíže“ k preferenční relaci zavedené na množině spotřebních košů, protože jako své koordináty obsahuje přímo množství statků, ve srovnání s kardinálními mezními užítky u spojitě funkce.)
- Matematická reprezentace s sebou sice přináší sobě vlastní možnosti formulovat užitečné závěry, ale také přináší sobě vlastní objekty, jejich vlastnosti a vztahy, které se díky našemu používání jazyka přenášejí do domény ekonomické. Problémy s ekonomickou interpretací jsou dány především *přenášením* objektů, jejich vlastností a vztahů i v těch případech, kdy potřeba konzistence ekonomické domény spíše vyžaduje jejich *abstrahování* na straně domény matematické. (V tomto smyslu je pro ekonomickou interpretaci teorie spotřebitele vlastně škoda, že se o funkční reprezentaci preferenčního uspořádání mluví jako o funkci *užitku*, protože to ve spojení s *přenosem objektu funkce* budí dojem, že užitek je „něčím“. Něčím jiným než užítím statku při uspokojení potřeby, užítím, které je spotřebitelem nějak preferováno vůči uspokojení dalších potřeb.)

Vymezení vlastností ekonomické interpretace je z výše uvedených důvodů důležitou součástí práce s matematizovanými ekonomickými modely, která ovlivňuje porozumění jim samotným.

Literatura

- Aristoteles (1996). *Poetika*. Praha: Svoboda. Antická knihovna. ISBN: 978-80-205-0295-7.
- Black, M. (1962). *Models and metaphors: studies in language and philosophy*. Ithaca: Cornell University Press. ISBN: 978-0-8014-0041-4.
- Border, K. C. (2011). *Technical Results on Regular Preferences and Demand*. Pasadena: California Institute of Technology. Dostupné z: <http://people.hss.caltech.edu/~kcb/Notes/Demand0-Preferences.pdf>
- Debreu, G. (1971). *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. New Haven: Yale University Press. ISBN 978-0-300-01559-1. Dostupné z: <http://cowles.yale.edu/sites/default/files/files/pub/mon/m17-all.pdf>
- Debreu, G. (1986). Theoretic Models: Mathematical Form and Economic Content. *Econometrica*, 54(6), 1259–1270. <http://dx.doi.org/10.2307/1914299>
- Gibbard, A.; Varian, H. R. (1978). Economic Models. *The Journal of Philosophy*, 75(11), 664–677. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/2025484>

- Gilboa, I.; Postlewaite, A., Samuelson, L., Schmeidler, D. (2014). Economic Models as Analogies. *Economic Journal*, 124(8), F513–F533, <http://dx.doi.org/10.1111/eoj.12128>
- Gravelle, H.; Rees, R. (2004). *Microeconomics*. London: Prentice Hall. ISBN: 0-582-40487-8.
- Hausman, D. M. (1992). *The Inexact and Separate Science of Economics*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-42523-9.
- Hesse, M. B. (1967). Models and Analogy in Science, in Edwards, P., ed., *The Encyclopedia of Philosophy*. 1st edition. New York: Macmillan, s. 354–359. ISBN: 978-0-02-894950-5.
- Hesse, M. B. (2000). Models and Analogies, in Newton-Smith, W. H., ed., *A Companion to the Philosophy of Science*. 1 edition. Oxford: Blackwell, s. 299–307. ISBN: 978-0-631-23020-3.
- Holyoak, K. J. (2012). Analogy and Relational Reasoning, in Holyoak, K. J., Morrison, R. G., ed., *The Oxford Handbook of Thinking and Reasoning*. New York: Oxford University Press, s. 234–259. ISBN: 978-0-19-931379-2.
- Kuhn, T. S. (1997). *Struktura vědeckých revolucí*. Praha: Oikoymenh. ISBN: 978-80-86005-54-2.
- Mas-Colell, A.; Green, J. R.; Whinston, M. D. (1995). *Microeconomic theory*. New York: Oxford University Press. ISBN: 0-19-510268-1.
- Renou, L.; Schlag, K. H. (2014). Ordients: Optimization and comparative statics without utility functions. *Journal of Economic Theory*, 154(11), 612–632, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jet.2014.09.013>
- Rubinstein, A. (2006). *Lecture Notes in Microeconomic Theory: The Economic Agent*. Princeton: Princeton University Press. ISBN: 978-0-691-12031-7.
- Soukup, J. (2012). *Mikroekonomická analýza*. 4. vydání. E-knihy. ISBN: 978-80-905326-1-8. e-pub.
- Sugden, R. (2000). Credible Worlds: The Status of Theoretical Models in Economics. *Journal of Economic Methodology*, 7(1), 1–31, <http://dx.doi.org/10.1080/135017800362220>
- Thomson, B. S.; Bruckner, J. B.; Bruckner, A. M. (2008). *Elementary Real Analysis*. 2. vydání. b.m.: ClassicalRealAnalysis.com. ISBN: 143484367X. Dostupné z: <http://classicalrealanalysis.info/com/documents/TBB-AllChapters-Portrait.pdf>
- Weintraub, E. R. (2002). *How economics became a mathematical science*. Durham: Duke University Press. Science and cultural theory. ISBN: 0-8223-2871-2.